COMPENDIO
D' UN CORSO DI LEZIONI DI FISICA SPERIMENTALE
DEL SIG. GIORGIO ATWOOD

Ad uso del Collegio della Trinità, e dell' Università di Cambridge

TRADOTTO DALL' IDIOMA INGLESE,
Ed accresciuto di una DISSERTAZIONE
sul Computo dell' Errore Probabile
nelle Sperienze ed Osservazioni

DAL P. GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie
PUBBLICO PROFESSORE DI MATEMATICA SUBLIME
NELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PAVIA.

IN PAVIA.

Nella Stamperìa del R., ed I. Monistero di S. Salvatore.
Con permissione.
MDCCLXXXI.

ALLA NOBILISSIMA ED ORNATISSIMA DAMA
LA SIGNORA MARCHESA
DONNA CLEMENTINA
BOTTA ADORNO
Nata
MARCHESA ARCONATI VISCONTI
DAMA DELL' INSIGNE ORDINE DELLA CROCIERA EC.

GREGORIO FONTANA

A niuno, che Vi conosca, NOBILISSIMA ED ORNATISSIMA SIGNORA MARCHESA, sembrerà ſtrano, che io anzichè una leggiadra poesia, o una ſtoria galante un Libro

Vi presenti tutto serio ed austero e spirante filosofica gravità. Perciocchè dove oggimai le più colte e gentili persone del Vostro sesso meno amabili e vezzose si riputerebbono, se fra le graziose novelle e le gioconde letture alcun sorso pur non gustassero di moderna Filosofia, Voi di più in questa parte da tutte le altre Vostre pari in singolar modo Vi distinguete. Nata allo splendore del Mondo, in cui tanto brillate, e cresciuta fra gli agj della grandezza Voi sapete ritrovare nel corso della giornata dopo le materne cure verso i teneri pegni dell'amor Vostro abbastanza di tempo da con-

sacrare allo ſtudio della Naturale Filoſofia. E sarà sempre una gloria di queſta noſtra Univerſità di avere in Voi, e nel cultiſſimo Voſtro Consorte, inspirata ed alimentata coteſta nobile scientifica avidità. Dopo tanti titoli non ad altri che a Voi, GENTILLISSIMA SIGNORA MARCHESA, ſi doveva l'offerta di queſto Libro. Riscontrando in eſſo quelle ſteſſe dottrine, delle quali la familiare conversazione co' miei più illuſtri Colleghi Vi ha resa poſſeditrice, troverete pur quivi colla più succinta inſieme e giudiziosa preciſione indicata la ſtrada, onde inſinuarvi colla scorta de' medeſimi negli altri più

elevati misterj della Fisica. Che se all'amabilità ed alle grazie del Vostro spirito nulla si asconde di delicato e di bello nelle produzioni delle Tre Arti Sorelle con occhio sì fino e indagatore da Voi bilanciate nel recente Vostro viaggio per le Provincie d'Italia, all'agilità e penetrazione del Vostro ingegno nulla può celarsi di quel Vero solido ed utile, che da tutte le altre distingue le opere filosofiche del nostro secolo. Nella lettura di queste ognora più profittando, e sempre nuovi lumi aggiugnendo ai già acquistati Voi sapete poi anche mostrarvene affatto spogliata, allorchè resa alla

gentil società, e deposta ogni apparenza di affettazion letteraria co' tratti amabili del Vostro candore, e coll' eleganza de' Vostri modi cortesi divenite l' interessamento e la delizia di tutti. Dopo questi pregj, tutti singolari, e tutti Vostri, il parlar qui di Antenati e di Titoli mal si confarebbe alla Vostra ed alla mia Filosofia. Alle sole qualità personali, alla dolce ingenuità del carattere, alle virtù della mente e del cuore, tanto superiori nell' estimazion Vostra medesima agli abbaglianti e splendidi doni della Vostra grandezza e fortuna, io ho voluto rendere omaggio col picciol dono,

che qui Vi presento. Piacciavi di accogliergo con lieto animo e gentile, e di riguardarlo come un pubblico attestato di gratitudine per la nobile considerazione, in cui Voi mostrate di avere la scelta schiera degli Uomini eletti al sapere, e per l' impegno, che pur mostrate grandissimo in tutto ciò che interessa la gloria di questa fiorente Università.

INDICE DELLE SEZIONI.

CAPO II.

CAPO III.

CAPO IV.

CAPO V.

CAPO VI.

CAPO VII.

CAPO VIII.

CAPO IX.

CAPO X.

CAPO XI.

CAPO XII.

APPENDICE.

DISSERTAZIONE DEL TRADUTTORE.

SEZIONE I.

FISICA GENERALE, E MECCANICA.

ESPERIMENTO I.

I Corpi leggieri, galleggianti ſulla ſuperficie dell' acqua, contenuta in un vaſo di vetro, ſono attirati verſo i lati del vaſo.

Queſta potenza (qualunque ne ſia la cagione), per cui i corpi ſono ſpinti gli uni verſo gli altri, è ſtata dal Cavaliere Iſacco NEWTON, e da altri denominata *attrazione*, *gravità*, *gravitazione*, ſecondo i diverſi modi, ne' quali lo ſteſſo principio opera. Così diciamo che il corpo più piccolo *gravita* verſo il più grande, e che il più grande *tira* il più piccolo.

ESP. II.

Le laſtre di vetro tenute contigue, ed inclinate l' una ſull' altra attraggono l' acqua, in cui ſo-

no immerſe, e la ſollevano ſopra il livello dell' acqua eſterna nell' intervallo ad eſſe frappoſto.

ESP. III.

I Tubi Capillari attraggono l' acqua, in cui vengon tuffati, e la innalzano ſopra il livello dell' eſterna.

ESP. IV.

Un filo di rame del diametro d' un decimo di pollice, e della lunghezza di tre pollici venendo diſteſo e ſtirato con varj peſi ſoſtiene 270. libbre prima di romperſi.

ESP. V.

Le ſuperficie piane, e ben liſcie de' corpi ſolidi meſſe in contatto rimangono fortemente attaccate.

ESP. VI.

I corpi resistono per la loro forza d' inerzia agl' impulsi di qualunque altra forza tendente a metterli in moto. I corpi in moto resistono agl' impulsi di qual siasi forza tendente ad accelerare o ritardare il loro moto.

ESP. VII.

Un corpo, che attrae comunque un altro corpo, è attratto da questo con egual forza. I corpi, che tendono gli uni verso gli altri per la loro mutua attrazione, si muovono con velocità, le quali sono in ragione inversa delle loro quantità di materia.

La Terra attira la Luna, ed è ugualmente attirata da lei. La quantità di materia nella Terra è in circa quaranta volte più grande che non è nella Luna; quindi se questi due corpi dovessero avvicinarsi l' uno all' altro in retta linea in virtù della loro mutua attrazione, nel mentre che la Terra si porterebbe verso la Luna pel tratto d'un mi-

gllo, la Luna ne ſcorrerebbe quaranta verſo la Terra: E le loro relative velocità eſſendo ſempre come 40: 1., verrebbono queſti due corpi finalmente ad incontrarſi e colliderſi in direzioni oppoſte, e con momenti uguali.

ESP. VIII.

Se un pezzo d' oro, ed una piuma cadono nello ſteſſo iſtante dalla ſommità d' un recipiente di vetro ben vuoto d' aria, arrivano entrambi nel medeſimo tempo al ſondo del ricipiente.

Da ciò appariſce, che i corpi ſono attirati verſo la Terra con forze non proporzionali ai loro volumi, ma alle quantità di materia che eſſi contengono: imperciocchè ſupponendoſi, che il peſo della ghinea ſia mille volte maggiore del peſo della piuma, vi vorrà una forza mille volte maggiore per muovere la ghinea che per muover la piuma pel medeſimo ſpazio nello ſteſſo tempo.

ESP. IX.

Se due forze agiſcono nel tempo ſteſſo ſopra un corpo nella direzione dei lati di un parallelogrammo, e ſono proporzionali a queſti nella quan-

tità, si osserva, che una forza opposta nella direzione della diagonale, e ad essa proporzionale contrabbilancia le altre due, ed il corpo sollecitato resta in quiete.

ESP. X.

Se un corpo viene sollecitato da tre forze rappresentate nella quantità e direzione dai tre lati di un triangolo; ovvero da quattro forze rappresentate in quantità e direzione dai quattro lati di un trapezio, esso rimane in quiete.

EPS. XI.

Un corpo, o un sistema di corpi non istà in quiete se il comun centro di gravità non è sostenuto.

Il centro di gravità di un corpo, o d'un sistema di corpi è quel punto, nel quale il peso di tutto il sistema si concepisce raccolto; e conseguentemente dee discendere nel luogo più basso possibile.

ESP. XII.

Una figura piana collocata ſopra un punto o ſoſtegno non ſi ferma in qualunque ſiaſi poſizione ſe i centri di gravità e di ſoſpenſione non coincidono.

ESP. XIII.

Se un corpo pende liberamente da un centro di ſoſpenſione, non rimane in quiete ſe non quando la linea di direzione prolungata paſſa pel centro di ſoſpenſione.

ESP. XIV.

Se un corpo vibra liberamente intorno a diverſi centri di ſoſpenſione, l' interſezione delle linee guidate da que' centri perpendicolarmente all' orizzonte, quando il corpo è in quiete, ſarà il centro di gravità.

ESP. XV.

Ponno comporſi de' corpi in tal maniera, che facciano moſtra di aſcendere mentre i loro centri di gravità diſcendono.

ESP. XVI.

Si connettano inſieme con una verga due corpi di qualunque data grandezza e peſo, e ſi aggirino in un piano orizzontale intorno a diverſi punti della verga; ſi oſſerva, che il centro di gravità non è in quiete ſe il centro del moto non coincide con eſſo.

Le forze centrifughe di due corpi rotanti intorno ad un punto della verga non ſono eguali ſe i centri del moto e di gravità non coincidono.

ESP. XVII.

Se un cilindro viene collocato ſopra un piano orizzontale, la linea di direzione ſtando fuori

della base, il cilindro cascherà; ma se il piano si innalza per modo, che la linea di direzione venga a cadere dentro la base, il cilindro si sosterrà.

ESP. XVIII.

Se sopra un piano inclinato si collocano de' corpi solidi di qualsisia specie, questi discendono pel piano *rotolando*, se le linee di direzione cadono sempre fuori delle loro basi; e se cadono dentro le basi, e le superficie sono liscie, discendono *strisciando*.

ESP. XIX.

Si sospendano de' pesi ad una verga nella maniera seguente: tre oncie a sette pollici di distanza da un' estremità, quattro oncie a dieci pollici, ed un' oncia ad undici pollici di distanza; in tal caso la distanza del centro di gravità dalla stessa estremità è $= \frac{7\times3 + 4\times10 + 1\times11}{3+4+1} = 9$ pollici

ESP. XX.

Se una verga ſarà talmente diſpoſta, che la linea congiungente i centri di gravità e di ſoſpenſione ſtia a ſquadra ſopra la verga, queſta pendendo liberamente dal ſuo centro di ſoſpenſione non reſta immobile, eccetto che in una poſitura orizzontale.

ESP. XXI.

Un peſo, che ſi equilibra con un' oncia ſoſpeſa dal braccio più lungo di una bilancia falſa, ſe ſi aggiugne al peſo, il quale ſi equilibra con un' oncia ſoſpeſa dal braccio più corto; ſi oſſerva, che la ſomma è maggiore di due oncie.

ESP. XXII.

Una ſuperficie liſcia carica di peſi ſi collochi ſopra un piano orizzontale immobile: ſe ambedue le ſuperficie ſono dure e ben levigate, una forza

orizzontale uguale in circa ad un terzo del peso che viene portato dalla superficie superiore, incomincia a muover questa lungo il piano.

ESP. XXIII.

Sopra un piano immobile orizzontale si collochino due superficie, e si carichino di pesi uguali; per muoverle lungo il piano, vi si richiederanno forze uguali; ma se i pesi sono differenti, il peso maggiore richiederà una forza maggiore per esser mosso, qualunque sia la proporzione delle superficie.

ESP. XXIV.

Se un pendolo vibra sopra delle ruote di sfregamento, un dato moto impressogli non si estingue sì presto, come se fosse sospeso ad un sostegno immobile.

Gli effetti dello sfregamento possono computarsi in due maniere.

1. Dalla quantità del moto perduto in un dato tempo.

2. Dal tempo, nel quale una data quantità di moto viene diſtrutta: l'ultimo metodo è quello che ſi è pratticato nell' eſperimento,

---

ESP. XXV.

Vi ha equilibrio in una Leva diritta di qualſiſia ſpecie, quando la potenza ſta al peſo, come la diſtanza del peſo ſta alla diſtanza della potenza dal fulcro.

Se non vi ha equilibrio, preponderi adunque uno dei peſi. In conſeguenza di ciò il peſo preponderante avrà più momento dell' altro. Ma poichè per l'ipoteſi i peſi ſono inverſamente come le braccia della Leva, ne ſegue, che le velocità dei peſi ſono inverſamente come le loro quantità di materia; e quindi i momenti di entrambi rieſcono uguali. Ma ſi erano dimoſtrati ineguali: dunque, riſultando queſta concluſione contraddittoria dal negare la propoſizione affermata, queſta propoſizione è vera. Lo ſteſſo modo di dimoſtrare può eſtenderſi a tutte le potenze meccaniche.

ESP. XXVI.

Vi farà equilibrio in una Leva piegata quando la potenza ed il peso sono inversamente proporzionali alle rette perpendicolarmente tirate dal fulcro alle linee di direzione.

ESP. XXVII.

Se molti pesi sono sospesi alle braccia d' una Leva diritta, vi sarà equilibrio, quando la somma de' prodotti di ciascun peso moltiplicato per la sua rispettiva distanza dal fulcro da una parte è uguale alla somma dei prodotti presi all' istesso modo dall' altra parte.

ESP. XXVIII.

Lo stesso momento risulta sul braccio d' una leva diritta tanto se i pesi sono sospesi a quali si vogliano distanze dal fulcro, quanto se la somma dei pesi viene sospesa alla distanza del loro comun centro di gravità.

ESP. XXIX.

Vi ha equilibrio in una carrucola fiſſa, allorchè la potenza è uguale al peſo.

ESP. XXX.

Havvi equilibrio in una carrucola mobile ed unica, quando la potenza ſta al peſo come uno a due.

ESP. XXXI.

In un ſiſtema di carrucole, dove la ſteſſa corda attornia tutte le carrucole contenute in due forme o incaſtri, vi ſarà equilibrio, quando la potenza ſtia al peſo come l'unità al numero delle corde nell' incaſtro più baſſo.

ESP. XXXII.

In un ſiſtema di carrucole mobili, dove una corda ſeparata attornia ogni diſtinta carrucola,

evvi equilibrio, allorchè la potenza ſta al peſo come l' unità a quella poteſtà di due che ha per eſponente il numero delle carrucole.

ESP. XXXIII.

In quel ſiſtema di carrucole, nel quale la corda, che paſſa per ogni carrucola, è attacata al peſo, trovaſi l' equilibrio allorchè la potenza ſta al peſo come l' unità a quella poteſtà di due, il di cui eſponente è il numero delle carrucole, tolta dal totale l' unità.

ESP. XXXIV.

Quando la reſiſtenza, che agiſce contro un Cuneo, è perpendicolare ai lati, ſaravvi equilibrio ſe la potenza ſtia al peſo come il dorſo del Cuneo alla ſomma dei lati.

ESP. XXXV.

Vi ſarà equilibrio nella Vite, quando la potenza ſtia al peſo come la diſtanza fra due ſpire

contigue ſta alla circonferenza deſcritta dalla potenza.

ESP. XXXVI.

Evvi equilibrio nell' Aſſe a Ruota, allorchè la potenza ſta al peſo come il raggio dell' Aſſe al raggio della Ruota.

ESP. XXXVII.

Se un peſo viene ſoſtenuto ſopra un piano inclinato da una potenza, che agiſce in una direzione parallela al piano, la potenza ſtarà al peſo come l' altezza del piano alla lunghezza.

ESP. XXXVIII.

Se un peſo viene ſoſtenuto ſopra un piano inclinato da una potenza, che agiſce in una direzione parallela alla baſe, la potenza ſtarà al peſo come l' altezza del piano alla baſe.

ESP. XXXIX.

Se un peſo viene ſoſtenuto ſopra un piano inclinato da una potenza, che agiſce in una direzione comunque inclinata al piano, la potenza ſta al peſo come il ſeno dell' elevazione del piano al coſeno dell' angolo, in cui la direzione della potenza è inclinata al piano.

ESP. XL.

Havvi equilibrio in una leva compoſta, quando la potenza ſta al peſo come il prodotto delle potenze in ciaſcuna leva al prodotto de' peſi.

La regola generale per determinare quando ci ſarà equilibrio in una Macchina compoſta di qualſiaſi numero di Potenze meccaniche, è queſta; ſi trovino le ragioni della Potenza al peſo in ciaſcuna Potenza meccanica: il prodotto di queſte ſarà la ragione della potenza al peſo allorchè vi ſarà equilibrio nella macchina.

ESP. XLI.

Una palla d' avorio urtando direttamente contro una palla d' avorio immobile di ugual peso le comunica presso a poco tutta la velocità dell' urto, e dopo la percossa rimane quasi in quiete.

ESP. XLII.

Si dispongano in retta linea i centri di quante si vogliano palle contigue d' avorio di egual peso; e la prima vada ad urtare la seconda nella direzione della linea che congiugne i centri: si osserva, che la palla più lontana dall' urto si separa dalle altre con una velocità prossimamente uguale a quella della palla urtante, e questa colle intermedie resta quasi immobile.

ESP. XLIII.

Una palla d' avorio, che urta direttamente contro una palla immobile d' avorio di doppio

peſo, le comunica a un di preſſo due terzi della velocità, colla quale ſi fa la percoſſa.

ESP. XLIV.

Se una palla elaſtica urta direttamente contro una palla elaſtica immobile di maggior peſo, la palla impellente viene rimbalzata. Se una palla più peſante percuote direttamente una più leggiera in quiete, entrambe le palle dopo la percoſſa vanno nella direzione del colpo.

ESP. XLV.

Se due peſi ineguali pendono da una funicella, che gli uniſce, ed accavalca una carrucola fiſſa, il maggiore prepondera, e nella ſua diſceſa deſcrive ſpazj, che ſono come i quadrati dei tempi della caduta dalla quiete.

Se un corpo cade liberamente per la forza di gravità, deſcrive ſedici piedi in un ſecondo, e cinquanta quattro piedi in due ſecondi di tempo: la velocità di queſto moto è troppo grande per poterſi fare qualche oſ-

ſervazione ſulla proporzione dei tempi della diſceſa e degli ſpazj deſcritti, a meno che il corpo non cada da altezze grandiſſime. Ma in queſto eſperimento l' aſſoluta forza della gravità eſſendo diminuita, anco la velocità ſarà talmente diminuita, che le proporzioni dei tempi della caduta, e degli ſpazj deſcritti ſaranno agevolmente verificate anche nella diſceſa da picciole altezze. Se i peſi ſon a, e b, lo ſpazio deſcritto dal peſo preponderante ſarà $16t^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)$ piedi in t ſecondi; perlocchè, ſe $a = 8\frac{1}{4}$ oncie, e $b = 8$ oncie, il più peſante diſcenderà di circa tre pollici in un ſecondo, 3×4 pollici in due ſecondi, 3×9 pollici in tre ſecondi, e così in ſeguito, fatto il dovuto diffalco per la perdita del moto prodotta dallo sfregamento, il quale debb' eſſere moltiſſimo diminuito, affinchè l' eſperimento aſſai da vicino corriſponda alla teoria. Alcune utili regole pratiche poſſono inferirſi dalla teoria de' corpi liberamente cadenti per la forza di gravità. Suppongaſi, lo ſpazio traſcorſo da un corpo cadente dalla quiete in un ſecondo eſſere di ſedici piedi, qual' è proſſimamente (e la reſiſtenza dell' aria lo renderà anche più proſſimo): ſia s uno ſpazio qualunque deſcritto in piedi, v la velocità acquiſtata alla fine della diſceſa in piedi, t il tempo della diſceſa in ſecondi; ed abbiamo

$$s = 16t^2,\ s = \frac{v^2}{64},\ v = 8\sqrt{s},\ v = 32t,\ t = \frac{\sqrt{s}}{4},\ t = \frac{v}{32}.$$

Quindi essendo data una qualunque di queste quantità, cioè o il tempo della discesa, o lo spazio trascorso, o la velocità acquistata dal corpo caduto dalla quiete, le altre due possono immantinente determinarsi.

ESP. XLVI.

Se due corpi incominciano a discendere dal punto più alto di un piano inclinato nel medesimo istante, uno di essi discenderà per l'altezza perpendicolare nel mentre che l'altro giugne sul piano all'intersezione della perpendicolare condotta dall'angolo opposto.

ESP. XLVII.

Se i corpi discendono per piani inclinati aventi la stessa altezza, i tempi della discesa sono come le lunghezze de' piani.

Imperciocchè i tempi di descrivere diversi piani inclinati sono direttamente come le lunghezze de' piani, ed inversamente come le radici quadrate delle loro altezze perpendicolari: le altezze essendo le stesse in questo espe-

timento, ne ſegue, che i tempi di deſcrizione ſaranno come le lunghezze.

ESP. XLVIII.

Se due pendoli ſono uguali in lunghezza, ſi oſſerva, che deſcrivono archi uguali in tempi uguali, qualunque ſia la proporzione de' loro peſi.

Di qui raccogliamo, che la gravità agiſce ne' corpi con forze proporzionali alle loro quantità di materia. Imperciocchè, ſe i due pendoli vibrano per lo ſteſſo ſpazio nello ſteſſo tempo, ne ſegue, che la gravità debba agire nel più peſante con una forza proporzionalmente più grande di quella, colla quale ſpinge il più leggiero. Ved. ESP. VIII.

ESP. XLIX.

Se due pendoli ſono uguali in lunghezza ſi oſſerva, che eſſi deſcrivono i piccioli archi circolari a un dipreſſo nel medeſimo tempo, qualunque ſia la proporzione dei piccioli archi.

Ogni volta che le forze, le quali accelerano i corpi, sono proporzionali agli spazj che restano a descriversi, i tempi di descrivere quegli spazj risultano eguali. Nel caso presente, le forze, che accelerano i pendoli, sono come i seni delle loro distanze angolari dal punto più basso; e gli archi essendo piccioli, la ragione de' loro seni sarà all' incirca la stessa che quella degli archi medesimi, e degli spazj da descriversi. Quindi ne segue, che le semivibrazioni dei pendoli per diversi piccioli archi, e conseguentemente le intere vibrazioni si fanno in tempi a un dipresso uguali.

E S P. L.

Se le lunghezze di due pendoli sono come quattro ad uno, si osserva, che i tempi delle loro vibrazioni nei piccioli archi circolari sono come due ad uno.

E S P. L I.

Se una verga cilindrica vibra in un piano verticale intorno ad una delle sue estremità, come intorno ad un asse di moto; un pendolo, la

di cui lunghezza è due terzi della verga cilindrica, vibrerà nel medesimo tempo.

Il *centro* di *oscillazione* è quel punto, in cui tutto il *momento* di un corpo rotante intorno ad un centro di moto resta raccolto: in una verga cilindrica, che vibra intorno ad uno de' suoi estremi, questo punto è distante due terzi dell'intera lunghezza dal centro del moto. La distanza del centro di oscillazione dal centro del moto determina la lunghezza di un pendolo.

ESP. LII.

In un Pendolo Composto, a misura che il centro di sospensione vien portato più vicino al centro di gravità, la distanza del centro di oscillazione dal centro di sospensione va crescendo senza limite.

Siavi un pendolo composto, il quale contenga due pesi A, e B attaccati all'estremità di una verga: e le distanze di A, e B dal centro di sospensione sieno rispettivamente a, e b, se i pesi sono dalla stessa parte del centro di sospensione, la distanza del centro di oscillazione da esso sarà $\frac{Aa^2+Bb^2}{Aa+Bb}$; se i pesi sono da differenti parti del

centro di sospensione, la distanza del centro di oscillazione da quello sarà $\frac{Aa^2+Bb^2}{Aa-Bb}$: in questo caso, quando $Aa=Bb$, il centro di gravità coincide col centro di sospensione, e la distanza del centro di oscillazione da esso diventa $\frac{Aa^2+Bb^2}{o}$, cioè infinita.

ESP. LIII.

Se la base di una Cicloide inversa è parallela all' orizzonte, ed i corpi discendono da diversi punti dell' arco sino al punto infimo, si osserva, che i tempi della discesa sono uguali.

Le forze, che accelerano i corpi discendenti per l' arco cicloidale nella situazione indicata, sono come gli spazj, che restano a descriversi; perlocchè i tempi della discesa per essi debbono essere uguali.

ESP. LIV.

Se due corpi cadono dalla quiete nello stesso istante, uno descrivendo la semicicloide inversa, l' altro discendendo per una linea retta che unisce

le estremità di quella; il corpo, che descrive la curva, arriva al punto infimo prima di quello che discende lungo la retta.

La Cicloide si chiama per questa proprietà la *Linea della più veloce discesa*.

ESP. LV.

I corpi lanciati vicino alla superficie della terra in qualunque direzione non perpendicolare all' orizzonte descrivono una parabola.

L' esperimento non si accorda esattamente colla teoria de' projetti se non allorquando si prende in considerazione la resistenza dell' aria; ma la differenza non è grande. Alcune regole pratiche, possono dedursi dai principj dei projetti: Negli sperimenti fatti intorno alla forza della polvere, e ad altre circostanze relative all' Artiglieria, l' angolo di elevazione, o la prima direzione del projetto è ordinariamente 45.°, nel qual caso essendo date dall' osservazione il tempo della volata si renderanno immediatamente noti la portata orizzontale, la massima altezza, e la velocità di projezione.

Sia $a =$ alla massima altezza del projetto } in piedi
$v =$ alla velocità di projezione }
$b =$ alla portata orizzontale }
$t =$ al tempo della volata in secondi.

Quindi essendo dato t ne inferiremo

$$a = 4t^2$$

$$b = 16t^2$$

$$v = t\sqrt{512}.$$

ESP. LVI.

Se la velocità di projezione è data, la portata orizzontale è massima allorchè l' angolo di elevazione $= 45^\circ$.

SEZIONE II.

IDROSTATICA.

ESPERIMENTO I.

Un vaso di vetro pieno d'acqua si pesi nell' aria; poscia si pesi nell' acqua; si trova aver perduto la maggior parte del suo peso.

Prima che perfettamente s'intendessero i principj d' Idrostatica, questo esperimento indusse i filosofi ad immaginare, che i fluidi fossero spogliati del proprio peso quando erano immersi in fluidi della stessa specie. La vera ragione di questa apparente perdita di peso si vedrà ne' seguenti sperimenti.

ESP. II.

Una sfera cava rendasi abbastanza pesante sicchè vada a fondo nell' acqua, e si pesi quando vi è immersa: poscia empiendola d'acqua, e così

pure immersa pesandola nuovamente si trova più pesante di prima a motivo dell'acqua racchiusa.

Questo esperimento è una pruova diretta, che un fluido, benchè immerso nel suo proprio elemento, non perde alcuna parte del suo peso.

ESP. III.

Si versi del mercurio in tubi aperti alle due estremità, ed incurvati ad angoli diversi; immergendo le braccia più corte nell'acqua si osserva, che il mercurio s'innalza in tutte le braccia più lunghe.

Una delle principali proprietà de' fluidi è la loro pressione in tutte le direzioni, la quale è dimostrata da questo esperimento.

ESP. IV.

Un pezzo di sughero si adatti al fondo di un vaso per modo, che le superficie sieno dappertutto in contatto. Se si versa del mercurio nel va-

ſo, il ſughero non aſcende fintantochè la ſua ſuperficie non è ſeparata dal fondo del vaſo.

Il ſughero immerſo nel mercurio è premuto all' insù con una forza, che è maggiore del ſuo peſo, e dee conſeguentemente aſcendere qualora la comunicazione fralla ſua inferior ſuperficie ed il fluido non venga impedita: queſto è ciò che ſi effettua nell' eſperimento, reſtando il ſughero attaccato al fondo del vaſo parte pel ſuo proprio peſo, e parte per quello del mercurio che ſuperiormente lo preme.

ESP. V.

Si verſi dell' olio in un tubo ricurvo, aperto ai due eſtremi; ed immergendo il braccio più corto nell' acqua, ſi oſſerva, che l' olio ſi alza nel braccio più lungo, e ſi abbaſſa nell' altro.

Queſto eſperimento è diretto a pruovare, che un fluido più peſante gravita ſopra un più leggiero.

ESP. VI.

Un tubo aperto alle due eſtremità ſi immerga nel mercurio contenuto in un vaſo di vetro:

ſe ſi verſa dell' acqua nel vaſo, ſi oſſerva, che il mercurio ſi innalza nel tubo.

Queſto eſperimento pruova, che un fluido più leggiero gravita ſopra un più peſante. Di quì parimente s'inferiſce, che comunque leggiero ſia un fluido, una ſufficiente quantità del medeſimo premendo ſulla ſuperficie d'un fluido più grave obbliga queſto ad innalzarſi in un tubo immerſo, col di cui interno il fluido più leggiero non ha comunicazione.

ESP. VII.

Se quanti ſi vogliano tubi, comunque differenti in dimenſione e in figura, comunicano l'uno coll' altro, per modo che un fluido verſato in uno di eſſi ſcorra negli altri; ſi oſſerva, che le ſuperficie del fluido in tutti i tubi ſono a livello.

ESP. VIII.

Si immerga nel mercurio il braccio più corto di un ſifone; ſe ſi leva l'aria dall' interno del tubo, ſi oſſerva, che il mercurio eſce dal braccio più lungo in un getto continuo.

Può concluderſi dai precedenti eſperimenti, che la gravitazione de' corpi verſo il centro della terra non è riſtretta a quelli, che ſono volgarmente chiamati gravi, ma ſi eſtende a tutta la materia in generale; e che i termini grave e leggiero ſono eſpreſſioni puramente relative.

I peſi relativi de' corpi, o le loro ſpecifiche gravità ſono miſurate dai peſi aſſoluti ſotto volumi uguali: così ſe un pollice cubico di rame peſa nove volte tanto quanto un pollice cubico d'acqua, le relative o ſpecifiche gravità del rame, e dell'acqua ſaranno come nove ad uno.

Quindi poſſono ricavarſi queſte regole generali.

1. I peſi de' corpi ſono proporzionali ai loro volumi, e alle loro ſpecifiche gravità inſieme.

2. I volumi de' corpi ſono come i loro peſi direttamente, e come le ſpecifiche gravità inverſamente.

3. Le ſpecifiche gravità de' corpi ſono come i loro peſi direttamente, e i volumi inverſamente.

ESP. IX.

Una piaſtra circolare di ottone ſi applichi eſattamente all' inferiore apertura di un tubo cilindrico immerſo perpendicolarmente nell' acqua. Se la piaſtra ſi attuffa ad una profondità di otto volte la ſua groſſezza, ſarà preciſamente ſoſtenuta dalla preſſione dell' acqua.

Il peſo dell' ottone è uguale al peſo di otto volte un pari volume d' acqua; laonde la preſſione contro l' ottone debb' eſſere uguale al peſo d' una colonna d' acqua, la di cui baſe è la ſuperficie premuta, e l' altezza è la ſua diſtanza perpendicolare dalla ſuperficie dell' acqua.

E S P. X.

Un tubo aperto ai due eſtremi ſi introduca in un vaſo cilindrico chiuſo. Se ſi verſa dell' acqua per entro ſicchè ſi ſollevi a qualunque altezza nel tubo, ſi oſſerva, che la preſſione ſoſtenuta dalla baſe del vaſo è uguale al peſo di un cilindro d' acqua, la di cui baſe è la ſuperficie premuta, e l' altezza la ſteſſa che quella dell' acqua nel tubo.

Noi veggiamo da queſto eſperimento, che la quantità della preſſione ſopra la baſe è molto maggiore che il peſo del fluido contenuto nel tubo o nel vaſo; il che è ſtato giudicato un paradoſſo, ma viene facilmente ſpiegato con oſſervare, che ſe ſi faceſſe un apertura nella ſommità del vaſo chiuſo, l' acqua per la ſua preſſione tendente all' insù ſalirebbe preſſo a poco al livello di quella del tubo, ond' è, che eſſendo queſt' acqua arreſtata dalla parte ſuperiore del vaſo, dee premere con-

tro la base con una forza uguale, giacchè l'azione e la reazione sono uguali; e per tal modo la pressione sostenuta dalla base dipende così dal peso del fluido, come dalla sua reazione contro la superior superficie del vaso.

ESP. XI.

Se un solido galleggia sulla superficie di un fluido, si osserva, che il fluido cacciato di luogo è uguale nel peso al solido.

Da questo esperimento si possono derivare le seguenti conclusioni: Poichè le specifiche gravità de' corpi sono come i loro pesi direttamente, e i volumi inversamente, se i pesi sono uguali, le gravità specifiche debbono essere inversamente come i volumi. Il peso dell' acqua cacciata di luogo, e quello del solido sono uguali per l'esperimento; laonde il volume dell' acqua cacciata di luogo dee stare a quello del solido come la gravità specifica del solido alla gravità specifica del fluido; ovvero in altre parole, la parte immersa sta a tutto il solido come la gravità specifica del solido a quella del fluido. Quindi apparisce, che le navi cacciano di luogo una quantità d'acqua uguale in peso a quella della nave e del suo carico. Se nella cavità della nave si introduce una quantità

d' acqua che renda il peſo del totale maggiore del peſo di un egual volume di acqua, la nave va a fondo.

ESP. XII.

Se un cilindro lungo ſette pollici, la di cui ſpecifica gravità ſia nove volte maggiore di quella dell' acqua, ſi immerge nel mercurio; due pollici e mezzo di eſſo cilindro rimarranno ſuor d' acqua.

Per l' ultimo eſperimento la parte immerſa ſta al tutto come la gravità ſpecifica del ſolido alla ſpecifica gravità del fluido; ovvero nel caſo preſente, come la parte immerſa : 7 : : 9 : 14. Perlocchè la parre immerſa $=\frac{9\times 7}{14}=4,5$; e la parte rimanente ſopra la ſuperficie dell' acqua $=2,5$ pollici.

ESP. XIII.

Se un cilindro di olmo (o di qualunque altra materia della ſteſſa ſpecifica gravità) lungo dieci pollici, ſi immerge perpendicolarmente nell'

acqua, la parte che rimane ſopra la ſuperficie ſi oſſerva eſſere di quattro pollici.

2. Se lo ſteſſo cilindro ſi immerge nello ſpirito di vino, la parte che reſta ſopra la ſuperficie è ſolamente di tre pollici.

Su queſto principio è coſtruito l' Idrometro. Imperciocchè la gravità ſpecifica e il volume del ſolido perſeverando gli ſteſſi, ſarà la ſpecifica gravità del fluido inverſamente come la parte immerſa del ſolido: ſe pertanto il cilindro ſarà graduato, la profondità, a cui giugne quando ſi immerge in differenti fluidi, moſtrerà le loro relative e ſpecifiche gravità. Così la profondità, a cui diſceſe nell' acqua, ſi oſſervò di ſei pollici, nello ſpirito di vino di ſette pollici; laonde la ſpecifica gravità dell' acqua ſta a quella dello ſpirito di vino in ragione inverſa di queſti numeri, ovvero come 7 a 6, o come 1 a 0, 857.

ESP. XIV.

Un cilindro lungo ſette pollici, di gravità ſpecifica nove volte maggiore di quella dell'acqua, ſi tuffi nel mercurio; due pollici e mezzo del cilindro rimarranno ſopra la ſuperficie. Se ſi verſa

dell'acqua ſul mercurio finchè giunga a coprire il cilindro, due pollici e ſette decimi rimarranno allora ſopra la ſuperficie del mercurio.

Da un eſperimento precedente ſi raccoglieva, che ſe un ſolido galleggiava ſulla ſuperficie d'un fluido la parte immerſa ſtava al tutto come la ſpecifica gravità del ſolido a quella del fluido: e ſu queſto principio, la parte del cilindro, che reſtò ſopra la ſuperficie del mercurio, fu da principio 2, 5 pollici: ma con verſarvi dell'acqua, il cilindro ſi alzò così, che 2, 7 pollici reſtarono ſopra la ſuperficie. Perciò la prima regola per trovare la proporzione della parte di un ſolido immerſo al tutto, ſarà eſattamente vera ſoltanto nel vuoto. La regola per determinare queſta proporzione nel caſo preſente è come ſegue: come ſta la parte immerſa al tutto, così ſta la differenza delle ſpecifiche gravità del ſolido e del fluido più leggiero alla differenza delle gravità ſpecifiche dei fluidi più grave e più leggiero.

Si ſcorgè da ciò, che ſe qualſivoglia corpo galleggia ſulla ſuperficie di un fluido nel vuoto, introdotta l'aria il corpo galleggiante ſi ſolleverà più in alto ſopra la ſuperficie, coſicchè la proporzione della parte immerſa al tutto ſarà alcun poco minore di prima. La differenza delle parti di un ſolido immerſo in un fluido, prima nel vuoto, e poi all'aria aperta, può calcolarſi in generale così:

Sia $m =$ al volume del ſolido.

$s =$ alla ſua gravità ſpecifica.

$A =$ alla parte immerſa, quando è all'aria aperta.

$B =$ alla parte immerſa, quando è nel vuoto.

$a =$ alla gravità ſpecifica del fluido, in cui il ſolido è immerſo.

$g =$ alla gravità ſpecifica dell'aria.

Dunque per la prima regola $B : m : : s : a$, e $B = \frac{ms}{a} =$ alla parte immerſa, quando ſi ſperimenta nel vuoto. Per l'ultima regola $A : m : : s - g : a - g$; onde $A = m\left(\frac{s-g}{a-g}\right)$ = alla parte immerſa, quando ſi eſperimenta nell'aria: e la differenza delle parti immerſe prodotta dalla preſſione dell'aria $= B - A = \frac{ms}{a} - \frac{m(s-g)}{a-g}$

$$= \frac{m(sa - sg - sa + ag)}{a^2 - ag} = \frac{mg(a-s)}{a^2}$$ proſſimamente. Quindi fatto il computo poſſiamo inferire, che il peſo dell'aria incombente alla ſuperficie dell'acqua, nella quale un corpo galleggia, produce così picciola differenza nella proporzione della parte immerſa al tutto, che può traſcurarſi in qualunque computazione di tal ſorta, eccettuato quando ſi ricerca un'eſtrema eſattezza.

ESP. XV.

Un ſolido immerſo nell' acqua ſi oſſerva peſar meno che all' aria aperta di tanto, quanto è il peſo di una quantità d' acqua uguale in volume al ſolido.

Tutti i ſolidi diſcendono in un fluido con forze minori de' loro peſi, e dall' eſperimento tal differenza appariſce uguale al peſo d' una quantità del fluido uguale in volume al ſolido. Con queſto principio ſi determinano i peſi relativi, o le ſpecifiche gravità de' corpi. La regola è queſta: ſi peſi il ſolido nell' aria, ed in un altro fluido qualunque. Quindi come il peſo totale ſta alla differenza de' peſi così ſta la gravità ſpecifica del ſolido alla gravità ſpecifica del fluido.

ESP. XVI.

Un pollice cubico di qualſivoglia materia, che va a fondo nell' acqua, venendo in eſſa immerſo, peſa meno 253, 2 grani, che quando è peſato nell' aria.

Da questa esperienza si trae una conclusione, la quale grandemente facilita il computo delle gravità specifiche de' volumi, e pesi de' corpi. Il peso perduto dal pollice cubico nell'acqua scorgesi dall'esperimento precedente non altro essere che il peso di un pollice cubico d'acqua, e questo in conseguenza è $= 253, 2$ grani: perciò un piede cubico d'acqua, ovvero 1728 pollici $= 253, 2 \times 1728 = 437000$ grani a un dipresso, ovvero 1000 oncie. Sia $w =$ al peso di un corpo in oncie; s la sua gravità specifica presa in quella scala, dove la gravità specifica dell'acqua $= 1000$; m il suo volume in parti d'un piede cubico; ed abbiamo la seguente proporzione.

$$1000 : w :: 1000 \times 1 : m \times s$$

ovvero come il numero delle oncie contenute in un piede cubico d'acqua sta al numero delle oncie contenute nel solido così sta la gravità specifica del piede cubico d'acqua $\times$ nel suo volume al prodotto della gravità specifica e del volume del solido: quindi $w = \frac{1000 \times ms}{1000} = ms.$

Esempio. Ritrovare il peso di 2, 16 pollici cubici di ottone. Qui $m = \frac{2, 16}{1782}$ parti di un piede cubico: $s = 8000$

ed $w = ms = \frac{2, 16 \times 800}{1728} = 10$ oncie.

Esempio 2. Ritrovare il volume dell' aria che pesa un' oncia: qui $w = 1$; $s = \frac{1000}{860}$; ed $m = \frac{w}{s} = \frac{860}{1000} = 0,86$ parti di un piede cubico, che è il volume ricercato.

ESP. XVII.

Se un sottilissimo vaso si pesa quando è pieno d' aria, e quando è vuoto d' aria, la differenza de' pesi osservasi presso a poco uguale a $\frac{2}{7}$ di un grano per ogni pollice cubico contenuto nel vaso.

ESP. XVIII.

Si equilibri un pezzo di sughero in una bilancia con un peso di piombo: se si trasporta tutto sotto il recipiente di una tromba pneumatica, fatto il vuoto il sughero prepondera.

Perchè tutti i corpi discendono nel vuoto con forze, che sono proporzionali alle loro quantità di materia, o ai loro pesi, ne segue, che due corpi, che si fanno equilibrio nel vuoto, contengono esattamente uguali quantità di materia; ma quando un corpo discende in un fluido di qual-

ſiſia ſpecie, purchè non tenace, la ſua forza di diſceſa è diminuita dal peſo di una quantità di fluido, uguale in volume al ſolido. Di qui naſce, che la preſſione dell'aria diminuiſce il peſo del ſughero più che non il peſo del piombo; e perciò queſti corpi equilibrandoſi nell' aria non conterranno uguali quantità di materia; onde tolta l'aria il peſo, che è realmente il più grande, dee preponderare.

Da ciò impariamo, che i veri peſi de'corpi non ſi conoſcono con peſarli nell'aria, qualora il corpo da peſarſi, ed il contrappeſo non foſſero della ſteſſa ſpecifica gravità.

ESP. XIX.

Se un pezzo di rame ſi equilibra eſattamente nell' aria con un peſo di ottone, e ſi immergono entrambi nell'acqua, il rame prepondera.

Il principio, da cui queſto eſperimento dipende, è il ſeguente; l'acqua preme verſo l'insù con maggior forza contro quel corpo, che è maggiore in volume; perciò l'ottone perderà più di peſo che il rame, il qual dee in conſeguenza preponderare. Si immergano due corpi qualunque di egual peſo, ma di diverſe ſpecifiche gravità in un fluido più leggiero; la ſeguente proporzione fondata ſu i principj delle ſpecifiche gravità determinerà quanto

più di peſo ſia perduto da uno che dall' altro: come il prodotto delle ſpecifiche gravità ſta alle loro differenze, così ſta il peſo di un ſolido × nella ſpecifica gravità del fluido, in cui i ſolidi vengono immerſi, alla differenza de' peſi ricercata.

Eſempio. Se 20 grani di ottone ſi equilibrano nell' aria con un peſo di rame, immergendoli nell' acqua l' equilibrio ſi toglie: il peſo da aggiugnerſi all' ottone per riſtabilir l' equilibrio ſi determina ricorrendo alla regola.

Come $9 \times 8 : 9 - 8 :: 120 \times 1 : \frac{120}{72} =$ un grano e due terzi = al peſo ricercato.

Eſempio 2. Se una ghinea del peſo di 129. grani ſi equilibra nell' aria con un peſo di ottone, e ſi immerge l' una e l' altro nell' acqua, conviene aggiugnere nella bilancia dalla parte dell' ottone $\frac{129\,(17,\,2 - 8)}{8 \times 17,\,2}$, overo un poco più di $8\frac{1}{2}$ grani per riſtabilir l' equilibrio diſtrutto per l' immerſione.

ESP. XX.

La ſpecifica gravità di un corpo, che non va a fondo nell' acqua, può determinarſi con unirlo ad un ſolido così che il compoſto ſia ſpecificamente più peſante dell' acqua.

Questo metodo di determinare le specifiche gravità può esprimersi generalmente così:

Sia A = al peso del solido più grave

a = alla sua specifica gravità

B = al peso del solido più leggiero

x = alla sua specifica gravità ricercata

C = al peso del composto

c = alla sua specifica gravità.

Per li principj delle gravità specifiche noi abbiamo $\frac{A}{a} + \frac{B}{x} = \frac{C}{c}$; onde $x = \frac{Bac}{Ca - Ac}$ = alla specifica gravità cercata.

ESP. XXI.

Empiasi di mercurio un tubo di vetro lungo 36 pollici, ed essendo chiusa un' estremità si immerga l' altra in un vaso di mercurio; si osserva, che il mercurio si abbassa dall' estremità superiore del tubo, e resta sospeso ad un' altezza di circa venti nove pollici e mezzo.

ESP. XXII.

In un tubo meno lungo di vent' otto pollici, empito di mercurio, ed immerſo come dianzi, il mercurio rimane contiguo all' eſtremità ſuperiore del tubo.

Il peſo del mercurio nel tubo è in queſto caſo minore della preſſione dell' atmosfera.

ESP. XXIII.

Se più barometri di varie dimenſioni ed inclinazioni ſi riempiano ed immergano, ſi oſſerva, che il mercurio rimane in tutti ſoſpeſo alla ſteſſa altezza perpendicolare.

ESP. XXIV.

Si collochi un barometro ſotto il recipiente di una tromba pneumatica; a miſura che ſi va eſtraendo l' aria, il mercurio continuamente diſcende fintantochè ſi mette preſſocchè a livello col mercurio del vaſo. Introducendovi l' aria, il mercurio ſorge alla primiera altezza.

ESP. XXV.

Un tubo lungo trenta ſei pollici, aperto dà ambe le parti immergaſi nel mercurio contenuto in un vaſo, la di cui interna capacità non comunica coll' aria eſterna; ſe il tubo ed il vaſo ſi collocano ſotto un recipiente, ſi oſſerva, che cavando l' aria dal recipiente il mercurio aſcende nel tubo preſſo a poco all' altezza ordinaria.

Da queſto eſperimento reſta provato, che la forza elaſtica dell' aria premente contro qualſivoglia ſuperficie è uguale al peſo dell' atmosfera premente ſulla medeſima ſuperficie.

ESP. XXVI.

Empiaſi d' acqua un vaſo, e ſi copra eſattamente la ſua apertura con una laſtra d' ottone; ſe il vaſo ſi capovolge, la laſtra continua a reſtarvi attaccata.

ESP. XXVII.

Un ſottil vaſo di vetro, la di cui apertura è chiuſa, ſi ponga ſotto il recipiente di una tromba pneumatica: ſe ſi vuota d' aria il recipiente, il vaſo ſi rompe.

ESP. XXVIII.

Ad un ſottil vaſo di vetro chiuſo nell' apertura ſi adatti una valvola, che ſi apra all' infuori: ſe queſto ſi mette ſotto il recipiente della macchina pneumatica, e ſi eſtrae, indi ſi riammette l' aria nel recipiente, il vaſo ſi ſpezza.

ESP. XXIX.

Alla ſuperiore apertura d' un recipiente ſi applichi una ſottil laſtra di vetro ſicchè ſia tolta ogni comunicazione fra l' aria interna, ed eſterna: vuotato d' aria il recipiente, la laſtra ſi rompe.

ESP. XXX.

Se un barometro ſi immerge in un vaſo di mercurio, e ſi ſoſpende dal braccio di una bilancia; ſi oſſerva, che il peſo neceſſario per far equilibrio col barometro, eſcluſo il tubo, è ugual al peſo del mercurio ſoſtenuto nel barometro dalla preſſione dell' atmosfera.

ESP. XXXI.

Due emisferi cavi di ottone ſi combacino ſtrettamente inſieme, ſicchè ſi tolga ogni comunicazione dell' aria eſterna ed interna, ſe l' aria ſi eſtrae dalla cavità, ſi oſſerva che gli emisferi ſono premuti l' uno contro l' altro con una forza, la quale ricerca per ſepararli un peſo di circa quindici libbre per ogni pollice quadrato di un circolo maſſimo della sfera bipartita.

ESP. XXXII.

Se gli emisferi vuotati d' aria ſi ſoſpendono ſotto il recipiente d' una macchina pneumatica;

fatto il vuoto nel recipiente, l' emisfero inferiore casca sul fondo del recipiente.

ESP. XXXIII.

Se un recipiente vuoto d' aria si fa comunicare con un vaso d' acqua per mezzo d' un tubo introdotto nel centro della piastra, sulla quale sta il recipiente; l' acqua ascende pel tubo, e si scaglia contro l' estremità del recipiente con un getto continuo.

ESP. XXXIV.

Facciasi galleggiare sulla superficie di un vaso d' acqua una sfera di vetro avente un picciolo foro fatto in quella parte che resta immersa; se il vaso si pone sotto il recipiente d' una tromba pneumatica, e si estrae l' aria, indi si riammette nel recipiente, la sfera si empie d' acqua, e va al fondo del vaso.

ESP. XXXV.

L'acqua calda, o i liquori recentemente fermentati si osservano bollire nel vuoto.

ESP. XXXVI.

Gli spazj, ne' quali una data quantità d'aria viene compressa, si scoprono vie minori nella stessa proporzione che le forze di compressione sono maggiori.

ESP. XXXVII.

Dieci pollici d'aria si rinchiudano col mercurio in un barometro esattamente cilindrico di trenta cinque pollici di lunghezza, se il barometro si rovescia, e si immerge nel mercurio, l'aria rinchiusa occupa allora venti pollici.

Da questo esperimento si ricava la seguente proporzione: come l'altezza ordinaria del barometro sta al difetto da detta altezza così sta lo spazio, che occupa l'aria

rinchiuſa dopo l' inverſione del barometro allo ſpazio, che occupava avanti l' inverſione.

Sia s = all' altezza ordinaria

d = al difetto da detta altezza

b = alla differenza fra l' altezza ordinaria, e la lunghezza del tubo

g = alla quantità d' aria rinchiuſa.

Quindi abbiamo in generale $s : d :: b + d : g$, e $g = (b + d)\frac{d}{s}$

Se è data la quantità d' aria rinchiuſa, per ritrovare il difetto dall' altezza ordinaria ſi faccia x uguale al difetto, ed abbiamo per la regola precedente $s : x :: b + x : g$. Perlocchè $x^2 + b\,x = sg$, ed

$$x = \frac{\sqrt{(b^2 + 4sg)} - b}{2}$$

Se l' altezza ordinaria è più grande, che la lunghezza del tubo, convien mutare il ſegno di b; e il difetto dall' altezza ordinaria, ovvero x ſarà allora eguale a $\frac{\sqrt{(b^2 + 4sg)} + b}{2}$.

Il tubo barometrico eſſendo cilindrico, la quantità d' aria rinchiuſa avanti l' inverſione, e gli ſpazj occupati dopo l' inverſione ſono computati in gradi, ne' quali è diviſa la lunghezza del tubo.

Una concluſione generale naſce dalle due precedenti

esperienze, cioè la forza elastica dell'aria è direttamente proporzionale alla sua densità, ed inversamente agli spazj ch' ella occupa,

---

ESP. XXXVIII.

L' altezza del mercurio in un barometro elevato sopra la superficie della terra si osserva minore dell' altezza ordinaria.

Essendosi provato, che la sospensione del mercurio nel barometro nasce dalla pressione dell' atmosfera, ne segue, che tolta una parte del peso dell'aria l'altezza del mercurio nel tubo dee farsi minore. La regola seguente serve per determinare l'altezza di una montagna per mezzo del barometro (mettendo da parte gli effetti delle differenti temperature dell' aria) : l'altezza del mercurio nel barometro appiè della montagna sia a: l' altezza alla cima b: l' altezza cercata sarà $= \frac{70}{6} \log. \frac{a}{b}$ in parti di un miglio. Il log. di $\frac{a}{b}$ si suppone qui di Briggs.

ESP. XXXIX.

Se un tubo si immerge in un fluido, e si rarefà l' aria contenuta nel tubo, il fluido s' innalza nel tubo.

Questo esperimento è simile all' Esp. XXV., ma è immediatamente diretto a spiegare l' effetto delle trombe nell' alzar l' acqua: questi stromenti comunque diversi nella costruzione, dipendono tutti dagli stessi principj, cioè dal peso ed elaterio dell' aria.

ESP. XL.

Se un tubo aperto nelle due estremità si immerge nell' acqua, la di cui superficie è contigua all' aria compressa nella metà dello spazio, che essa occupa nell' atmosfera, l' acqua si scaglia dal tubo verticalmente immerso ad un' altezza di circa trenta tre piedi, volendo prescindere dagli effetti dell' attrito, e della resistenza dell' aria.

ESP. XLI.

Se si percuote un campanello sotto il recipiente d' una macchina pneumatica, si osserva, che il suono diventa più debole quanto più d'aria si cava.

Da questo esperimento si scorge, che il suono si propaga per mezzo dell' aria; ma a cagione delle parti dell' apparato, le quali comunicano col campanello, si sentirà

ſempre un qualche ſuono, benchè l'aria ſia eſtratta quanto più ſi può.

ESP. XLII.

La fiamma ſi oſſerva ſpegnerſi nel vuoto. Se eſſa ſi colloca ſotto un recipiente chiuſo, ſi eſtingue dopo qualche tempo, ſebbene l' aria non ſia eſtratta.

ESP. XLIII.

Se l' acqua ſpiccia da uguali aperture fatte nei lati di vaſi cilindrici, ed i vaſi ſono mantenuti coſtantemente pieni, ſi oſſerva, che la quantità d' acqua ſcaricata in un dato tempo è in ragione diretta ſudduplicata della diſtanza perpendicolare delle aperture dalla ſuperficie dell' acqua.

ESP. XLIV.

Se un' apertura occupa il mezzo dell' altezza di un vaſo cilindrico, mantenuto coſtantemente pieno d' acqua, la diſtanza orizzontale, a cui l' acqua ſi ſcaglia, è uguale all' altezza del vaſo,

posti da banda gli effetti dell' attrito, e della risistenza dell' aria.

ESP. XLV.

Se si fanno delle aperture a diverse distanze dalla superficie dell' acqua contenuta in un vaso cilindrico mantenuto costantemente pieno, la distanza orizzontale, a cui l' acqua sgorga, scorgesi essere massima, quando l' apertura divide per mezzo la distanza fra la superficie dell' acqua, e la base del vaso.

In generale sia A l' altezza del vaso, D la distanza dell' apertura dalla superficie, allora il parametro della parabola descritta dal fluido sarà $4D$, l' ascissa $= A - D$: ed il quadrato dell' ordinata, ovvero della distanza orizzontale è uguale a $4AD - 4D^2$, la qual quantità è massima quando $A = 2D$, ovvero quando l' apertura sta nel mezzo della distanza fralla superficie dell' acqua, e la base del vaso.

ESP. XLVI.

Si facciano delle aperture ad uguali distanze dal fondo, e dalla sommità di un vaso cilindrico mantenuto costantemente pieno d' acqua; le distanze orizzontali, alle quali giugne l' acqua, che scaturisce da queste aperture, si osservano uguali.

SEZIONE III.

ELETTRICITA'. (*)

ESPERIMENTO I.

SE un tubo di vetro ben asciutto si strofina con un pezzo di seta, si osserva, che i corpicciuoli leggieri, come sono piume, palline di sughero, &c. venendo a quello avvicinati sono prima attratti, e poi respinti.

La potenza, per cui questi leggieri corpicciuoli sono attratti, e respinti, si chiama *Elettricità*, il corpo, pel di cui strofinamento viene prodotta l'elettricità, dicesi *elettrico*; lo strofinamento de' corpi elettrici si chiama *eccitazione*:

(*) *Il nostro sagacissimo Autore mostrandosi uomo libero e repubblicano anche in filosofia abbandona qui senza scrupolo l'ipotesi del suo celebre compatriotta Sig. Franklin, la quale ei si vede mancar tra mano nella spiegazione de' più segnalati feno-*

meni dell' Elettricità. Per puro amore del vero gioverà quì osservare, che mio Fratello Felice Fontana Direttore del Gabinetto Fisico del Reale Gran Duca di Toscana sino dall' anno 1772. aveva fatte in Firenze le sue nuove e grandiose esperienze direttamente contrarie all' ipotesi d' un solo fluido elettrico, le quali a me trasmesse in più lettere io comunicai al mio dotto e valoroso Collega Padre Barletti Professore di Fisica in questa Università. Anche i celebri Signori Murray Professore nell' Università di Upsal, e Bernoulli Regio Astronomo dell' Accademia di Berlino, che videro quelle sperienze in Firenze, desiderarono di averle in iscritto per farne parte a' loro Colleghi ed Amici. Finalmente nel 1775. tutti que' foglj, dove erano descritte le mentovate nuove sperienze, furono dal Fratello depositati ne' Registri dell' Accademia di Bologna. Quindi in un' ingegnosissima Operetta al medesimo diretta sotto il modesto titolo di Dubbj, e Pensieri sopra la Teoria degli Elettrici Fenomeni *il mio illustre Collega P. Barletti eccitandolo a pubblicare le sopra dette esperienze dispiegò tutta l'energia del suo fervido ingegno a mostrare il debole dell' Ipotesi Frankliniana, che egli vigorosamente attacca e scon-*

volge per ogni parte; e recentemente in altro libro sopra una Nuova Analisi del Fulmine, *decorato del più splendido elogio dalla Reale Accademia di Montpellier, ritrovò la Natura parlante ad alta voce contro l' ipotesi d' un solo Fluido nel più singolare e strepitoso fenomeno avvenuto in Cremona. Si conchiuda da tutto questo, che in certe quistioni delicate di Fisica Particolare non è mai troppa la scrupolosità, e la sospension del giudizio; che il profanare i vocaboli di* teoria *e* dimostrazione *ove non trattasi che di semplici ipotesi è un vendere l' orpello per oro; che finalmente un gran nome ritarda alcune volte i progressi d' una Scienza, della quale altronde egli sarà sommamente benemerito, come lo è indubitatamente il Sig. Franklin dell' Elettricità. Il gran Newton, creatore dell' Ottica, colla sua precipitata decisione dell' incorreggibilità dell' errore dipendente dalla differente refrangibilità de' raggi omogenei nelle lenti de' cannocchiali ritardò per avventura più d' un mezzo secolo la scoperta de' vetri acromatici.*

Pare in leggendo questa Sezione, che non fosse nota al nostro Autore l' ingegnosa invenzione dell' Elettroforo, *intorno a che è da vedersi la bella*

Memoria del mio illuſtre e valoroſo Collega Sig. D. Aleſſandro Volta Profeſſore di Fiſica Sperimentale in queſta Univerſità. Queſta intereſſante ſcoperta partorirà nuove anguſtie e nuovi imbarazzi a chi vorrà tentare di conciliarne i riſultati coll' Ipoteſi Frankliniana; e ſarà forza di creare nuove ipoteſi per ſoſtenere la prima, ſiccome è avvenuto allorchè ſi è voluto render ragione delle belle ſperienze de' celebri uomini P. Beccaria, Wilke, ed Epino, analoghe all' Elettroforo.

ESP. II.

La cera di ſpagna *eccitata* ſe ſi avvicina a leggieri corpicciuoli, prima gli attira, poſcia li reſpinge.

L'ambra, la ſeta, la pietra ga[illegible], il legno ſecco, e molti altri corpi venendo eccitati, attraggono e reſpingono i corpicciuoli leggieri, e ſono chiamati *elettrici*. I metalli, l'acqua, ed altri corpi, il di cui ſtropicciamento non produce queſta potenza di attrazione e ripulſione, ſono detti *non ele ttri*.

ESP. III.

Se un cilindro metallico viene ſoſtenuto ſopra fili di ſeta, o ſopra il vetro, e gli ſi accoſta

un corpo elettrico eccitato, ogni parte del cilindro attrae e respigne i leggieri corpicciuoli nella stessa maniera che fa l' elettrico eccitato. .

I metalli essendo dotati della virtù di trasmettere l'elettricità, sono chiamati *conduttori*; a questi può aggiugnersi l'acqua, e tutti i corpi che ne contengono.

E P S. I V.

Un filo di seta, o un bastone di vetro asciuttissimo si sospendano ad un sostegno di vetro; si osserva, che l'elettricità non può trasmettersi attraverso di essi.

Il vetro essendo impervio all' elettricità viene chiamato *non conduttore*. La seta, la gagate, la cera di spagna, l'aria, &c. sono similmente non conduttori, ed in generale tutti i corpi, che sono elettrici, sono non conduttori, e tutti i corpi, che sono non elettrici, sono conduttori.

Un corpo che non comunica se non con corpi elettrici, si dice essere *isolato*.

E S P. V.

Due palline di sughero si sospendano da fili lunghi in circa sei pollici, ed isolati; se la cera

di ſpagna, o il vetro eccitati ſi accoſtano a quelle, eſſe ſi reſpingono; ed allontanando queſti, ſi oſſerva, che quelle rimangono reſpinte.

L'uſo di iſolare i corpi è di circoſcrivere l'elettricità ad eſſi applicata e di renderne gli effetti permanenti.

ESP. VI.

I corpi conduttori non iſolati ſe ſi avvicinano ad un elettrico eccitato ſi oſſerva, che ſono attratti verſo di queſto.

Definizione. La virtù elettrica, che viene prodotta dall' eccitazione del vetro, ſi chiama *Elettricità Vitrea*, e la virtù, che viene prodotta dall' eccitazione della cera di Spagna, ſi nomina *Elettricità Reſinoſa*.

ESP. VII.

Se le palline di ſughero iſolate ſi reſpingono coll' elettricità vitrea, venendo loro applicata l'elettricità reſinoſa, queſta diſtruggerà una tal ripulſione, e farà, che le palline ſi reſpingano coll' elettricità reſinoſa, ſe l'eccitazione ſarà baſtantemente forte.

ESP. VIII.

La repulſione delle palline elettrizzate colla potenza reſinoſa viene diſtrutta dall' applicazione della vitrea.

ESP. IX.

Se il vetro, e la cera di ſpagna egualmente eccitati ſi applicano nello ſteſſo tempo alle palline di ſughero iſolate, non viene ad eſſo comunicata elettricità di alcuna ſorte.

Noi oſſerviamo dalle tre precedenti eſperienze, che le potenze vitrea, e reſinoſa ſi contrabbilanciano l' una coll' altra; quindi ſe entrambe ſono nello ſteſſo tempo applicate ad un corpo l' elettricità comunicata ſarà ſoltanto la differenza delle due, e ſarà di quella ſpecie che è la più forte.

ESP. X.

Se ſi elettrizzano de' corpi con potenze contrarie, eglino ſi attraggono fortemente.

Generali proprietà dell' Elettricità.

1. I corpi elettrizzati colla potenza vitrea, si respingono.
2. I corpi elettrizzati colla potenza resinosa, si respingono.
3. I corpi elettrizzati attraggono i non elettrizzati. (*)
4. I corpi elettrizzati con contrarie potenze, si attraggono fortemente.

(*) *Per rettificare questa proposizione del nostro Autore gioverà qui trascrivere le luminose dottrine dell' opera de'* Dubbj e Pensieri *citata in principio di questa sezione al numero LIX.* » *Ne seguiva indi* » *(dai Frankliniani principj) che tra i corpi egual-* » *mente forniti di fluido denso, ed espansivo vi fosse* » *ripulsione; al contrario attrazione, ove il fluido* » *più denso in uno dovesse spandersi nell' altro, in* » *cui fosse più raro. Ne seguiva in oltre, e fu per* » *gran tempo dogma dei Frankliniani, che ogni cor-* » *po elettrico in più o in meno attraesse qualunque* » *corpo non altrimenti elettrico, ossia nello stato suo* » *naturale. Il grande Epino fu, che e col maneggio* » *delle formole di queste stesse leggi previdde, e con* » *dirette sperienze dimostrò il comune abbaglio, e* » *stabilì gli elettrici movimenti nel solo caso di vera* » *elettricità in ambedue i corpi, che alle elettriche*

» *attrazioni, o ripulsioni ubbidiscono. Prevenuto pe-*
» *rò dalla rarefazione, o condensazione di fluido,*
» *secondo la Frankliniana Teoria, ritenne e nelle*
» *formole, e nelle sperienze l' errore, che necessariamen-*
» *te deriva da quella ipotesi, cioè le attrazioni ancora*
» *per sola differenza, senza opposizione di elettricità.*

» *Rimando alla profonda opera di Epino per*
» *questa parte della Storia, e della Teoria degli*
» *elettrici movimenti. Non voglio però ommettere di*
» *descrivere quì un mio esperimento, il quale sebbene*
» *in fondo si riduca a quelli di Epino, e di altri,*
» *che l' anno copiato, pure ha alcune singolarità,*
» *che lo rendono assai espressivo. Pianto sopra una*
» *base di legno una verga di vetro alta due in tre*
» *piedi, nella cima di cui fisso un piatto di legno*
» *piano, di otto pollici di diametro. Cuopro abbon-*
» *dantemente questo piatto di sottile segatura di le-*
» *gno, ovvero di crusca, e lo pongo alla distanza di*
» *quattro in cinque pollici sotto un grande condutto-*
» *re di metallo unito alla catena fortemente elettri-*
» *ca; ed osservo, che qualora il piatto è ben isolato,*
» *neppure un bricciolo di segatura di legno, o di*
» *crusca è attratto alla catena, ma tutta resta im-*
» *mobile sul piatto.*

» *Appena però ſotto al piatto preſento una*
» *punta metallica vicina, ſicchè poſſa in que' corpic-*
» *ciuoli alterarſi la naturale elettricità, volano eſſi,*
» *come uno ſciame d' api, in continuo torrente alla*
» *catena. Ritornano immobili ſul momento, che ri-*
» *tiro la ſottopoſta punta; e tornano a correre lar-*
» *gamente alla catena col nuovo preſentarſi di quella*
» *punta; e ciò ſi replica ad arbitrio, fintanto che*
» *ne reſta ſul piatto qualche porzione.. Ma affine di*
» *rendere vieppiù concludente queſta ſperienza, ô po-*
» *ſto ſul piatto più volte una leggiera palla di ſove-*
» *ro poco più groſſa d' un cece, legata ad un ſottil*
» *filo di ſeta; e preſentandovi ſotto la ſolita punta,*
» *fui pronto a ritirar quella palla nell' atto, che co-*
» *minciava a ſpingerſi alla catena, e la trovai ſem-*
» *pre elettrica al contrario della catena.*

Veggaſi ivi la ſeconda Lettera piena di nuove, e deli-
cate ſperienze ſulle elettriche attrazioni, e ripulſioni.

ESP. XI.

Se un tubo di vetro reſo ſcabro viene eccitato, eſſo comunica l' elettricità reſinoſa ai corpi vicini.

ESP. XII.

Un fiocchetto di piuma applicato alla cera di ſpagna eccitata, e toccato nello ſteſſo tempo con un conduttore viene elettrizzato colla potenza vitrea.

Si conchiude da queſta e dalla precedente eſperienza, che ambedue le elettricità reſinoſa, e vitrea ſono prodotte dall' eccitazione così del vetro, come della cera di ſpagna. Per maggior diſtinzione, quella potenza che viene prodotta dall' eccitazione del vetro liſcio, ſi chiamerà vitrea, e la contraria ſi dirà reſinoſa.

ESP. XIII.

Se lo ſtrofinaccio di un tubo o cilindro di vetro viene iſolato, ed al cilindro eccitato ſi applica un conduttore, ſi oſſerva, che lo ſtrofinaccio è elettrizzato di elettricità reſinoſa.

Qualunque volta le potenze elettriche ſono ſeparate nell' eccitazione, una potenza ſi attacca al corpo elettrico eccitato, e l'altra allo ſtrofinaccio.

ESP. XIV.

Se lo ſtrofinaccio, e il conduttore applicati ad un elettrico eccitato ſono entrambi iſolati, tanto meno di elettricità verrà prodotto quanto più perfetto ſarà l' iſolamento.

Nè lo ſtrofinaccio, nè il conduttore poſſono perfettamente iſolarſi a motivo dell' umidità, che ſi trova ſempre nell' aria.

Se l'aria, e la parte dell' apparato ſaranno aſciuttiſſime, poca, o neſſuna elettricità verrà eccitata nelle predette circoſtanze.

Quindi ſi conchiude, che le potenze elettriche non eſiſtono punto ne' corpi elettrici ſteſſi, ma ſono prodotte dalla terra mediante l' eccitazione de' corpi elettrici.

Un corpo elettrico contenuto fra ſuperficie parallele comunque diſpoſte, ſi nomina uno *ſtrato elettrico*.

ESP. XV.

I corpi elettrizzati attraggono i non elettrizzati, quantunque ſia ad eſſi frappoſto un ſottile ſtrato elettrico.

ESP. XVI.

I corpi elettrizzati con elettricità contrarie, ſi attraggono fortemente, ancorchè ſieno ſeparati da una ſottil lamina elettrica.

Così la fiamma comunica il calore attraverſo i corpi, che ſono impervii alla fiamma ſteſſa.

IPOTESI.

1. Le due potenze elettriche eſiſtono inſieme in tutti i corpi.

2. Giacchè eſſe ſi equilibrano, quando ſono unite, poſſono renderſi ſenſibili ſoltanto colla loro ſeparazione.

3. Le due potenze ſono ſeparate ne' corpi non elettrici per l'eccitazione degli elettrici, ovvero per l'applicazione degli elettrici eccitati.

4. Le potenze non poſſono ſepararſi ne' corpi elettrici.

5. Le due elettricità ſi attraggono fortemente attraverſo i corpi elettrici.

6. I corpi elettrici ſono impervii alle due elettricità.

7. L'una, o l'altra potenza applicata ad un corpo non elettrizzato reſpinge la potenza della ſteſſa ſpecie, ed attrae la contraria.

ESP. XVII.

Se una ſuperficie d'una laſtra viene elettrizzata coll'una, o l'altra delle due potenze, la ſuperficie oppoſta è elettrizzata colla potenza contraria, qualora non ſia iſolata.

Venendo applicata l'una, o l'altra potenza ad una delle ſuperficie, ella attrae la potenza contraria attraverſo la laſtra, e reſpigne l'elettricità della ſua ſteſſa ſpecie. Le due potenze portate in tal modo alle oppoſte ſuperficie della laſtra, che è impervia alle medeſime, rimangono ſoſpeſe, fortemente attraendoſi l'una coll'altra, fino a che o ſi ſpezza per la loro forza la laſtra interpoſta, o ſi forma per mezzo d'un conduttore una comunicazione fralle due ſuperficie.

Quando le due potenze ſono ſoſpeſe ſulle ſuperficie oppoſte di una laſtra elettrica, la laſtra chiamaſi *carica*. Un conduttore, che forma una comunicazione fralle due ſuperficie cariche, viene chiamato *circuito*.

ESP. XVIII.

Quando le due potenze ſi uniſcono con rompere una lamina d'aria, ſi oſſerva una luce elet-

trica, la quale è accompagnata da esplosione se la carica è considerabile: l'unione delle due elettricità distrugge gli effetti di ciascheduna, e lascia la lamina *scarica*.

Qualunque volta l'una, o l'altra potenza si accumula in una nuvola elettrica, la superficie della terra ad essa opposta viene elettrizzata colla potenza contraria. Queste potenze molte volte si uniscono rompendo lo strato d'aria frapposto.

ESP. XIX.

Se con uguali eccitazioni si caricano delle lamine d'aria, e di vetro uguali in grandezza e dimensione, si osserva, che la forza della carica rompe molto più facilmente la lamina d'aria che la lamina di vetro.

ESP. XX.

Se si applicano de' corpi isolati all' una, o all' altra superficie di una lastra carica in diverse distanze da essa, si osserva, che quanto è minore

la diſtanza, tanto è più forte la potenza ripulſiva. Se vi ſi applicano de' corpi non iſolati, quanto minore è la diſtanza dalla ſuperficie carica, tanto più forte è la potenza attrattiva; dal che ſi conchiude, che le forze della ripulſione ed attrazione elettrica variano in qualche ragione inverſa della diſtanza.

Egli è chiaro, che poſte tutte le altre coſe uguali una ſottil lamina elettrica di vetro farà una più forte eſploſione, che una lamina più groſſa, avvegnachè l' attrazione delle due potenze è più gagliarda quanto più ſono vicine l' una all' altra le due ſuperficie cariche.

ESP. XXI.

La forza di una carica elettrica non dipende punto dalla forma, in cui le ſuperficie cariche d' una data grandezza e groſſezza ſono diſpoſte.

Dalle precedenti ſperienze ſi può raccogliere, che la forza di una laſtra carica dipende da due coſe:

1. Dalla quantità delle ſuperficie cariche.

2. Dalla loro proſſimità.

Allorchè le ſuperficie d' una laſtra elettrica ſono cariche

di una certa quantità delle due potenze, ſi oſſerva, che non può ad eſſe comunicarſi niuna elettricità addizionale per quanto ſia grande l'eccitazione a tal effetto applicata.

ESP. XXII.

Se una parte del corpo umano forma una porzione del circuito elettrico, ſi oſſerva, che la ſcarica ſi ſente in quella parte ſoltanto che forma la comunicazione a meno che lé ſuperficie cariche non ſieno grandiſſime.

ESP. XXIII.

Se con circuiti di differente lunghezza, e di diverſe ſoſtanze ſi forma una comunicazione fra due ſuperficie cariche di una laſtra elettrica, ſi oſſerva, che la ſcarica ſi fa attraverſo il miglior conduttore, qualunque ſia la lunghezza degli altri.

2. Se i circuiti della ſteſſa ſoſtanza ſono differenti in lunghezza, la ſcarica ſi fa attraverſo il più corto.

3. Se i circuiti ſono i medeſimi per ogni riguardo, la ſcarica ſi fa attraverſo molti in una volta.

ESP. XXIV.

I tempi, ne' quali ſi ſcaricano le ſuperficie d' una laſtra elettrica pel circuito più lungo, o pel più corto, non ſono ſenſibilmente diverſi.

Parecchie miglia della ſuperficie della terra, grandi eſtenſioni di acqua, ec. ſonoſi fatte parte del circuito elettrico, e la ſcarica attraverſo tutte è ſtata iſtantanea.

ESP. XXV.

Se l' una, o l' altra ſuperficie d' una laſtra carica comunica colla terra, la potenza della ſuperficie oppoſta ſi diffonderà nel conduttore contiguo, ſebbene queſto ſia iſolato.

ESP. XXVI.

Si iſoli una ſuperficie d' una laſtra carica: ancorchè l' altra comunichi colla terra, non ſeguirà alcuna ſcarica dell' una o l' altra ſuperficie.

ESP. XXVII.

Sieno le ſuperficie d'una laſtra elettrica molto all'ingroſſo caricate ed iſolate, e formiſi un circuito interrotto; le due potenze ſaranno viſibili illuminando i punti del circuito interrotto; e ciaſcuna potenza ſi eſtenderà tanto più oltre le ſuperficie contigue, quanto più forte è la carica della laſtra; ma ſe le illuminazioni ſi incontrano da ciaſcun lato, ſeguirà immantinente un'eſploſione di tutta la carica.

Una laſtra cilindrica è quella, che è contenuta fra due circoli eguali, i di cui piani ſono paralleli.

ESP. XXVIII.

Se ſi carica una laſtra cilindrica d'aria contenuta nel recipiente d'una macchina pneumatica, ſi oſſerva, che quanto più d'aria ſi eſtrae d'infra le ſuperficie, tanto più facilmente le due potenze ſi uniſcono.

Scorgesi, che la scarica viene fatta da quella superficie, la quale possiede l' elettricità vitrea.

ESP. XXIX.

Se un recipiente vuoto d' aria si fa parte d' un circuito elettrico, e la carica non è sufficiente a produrre un' esplosione, vedrassi una luce elettrica in direzioni opposte spiccarsi dalle parti comunicanti colle due superficie vitrea, e resinosa.

Se due nuvole contigue molto alte nell' atmosfera sono elettrizzate con potenze opposte, la loro scarica produce un' apparenza simile alla luce diffusa osservata nel recipiente.

ESP. XXX.

La forza dell' eccitazione essendo la stessa, si osserva, che uno strato d' aria carico si romperà tanto più facilmente, quanto minor quantità d' aria è contenuta fra le superficie opposte.

Perciò una lamina elettrica si scarica più facilmente attraverso un recipiente vuoto d' aria, che non all' aria aperta, perchè quanto più rara diviene l' aria nel recipien-

te, da cui ſi eſtrae, tanto minor reſiſtenza incontrano ad unirſi le due potenze, che occupano le ſuperficie oppoſte, e ſi attraggono attraverſo la lamina elettrica.

PROPOSIZIONE.

Il minimo cilindro, il di cui diametro è finito, e la lunghezza evaneſcente, ſta al minimo cilindro, la di cui lunghezza è finita, ed il diametro evaneſcente, in ragione maggiore di qualunque aſſegnabile.

ESP. XXXI.

Le potenze elettriche, che riſiedono nelle ſuperficie oppoſte di una lamina cilindrica d' aria, il di cui diametro è evaneſcente, incontrano nella lamina elettrica interpoſta una reſiſtenza incomparabilmente minore di quella, che incontrerebbono nella più ſottil lamina d' aria contenuta fra due ſuperficie di grandezza finita.

ESP. XXXII.

Si preſenti un corpo puntuto all' una, o all' altra ſuperficie d' una laſtra elettrica carica, ſi

osserva, che qualunque sia la grandezza delle superficie, o la quantità dell' elettricità, tutto si scarica in silenzio, qualora l'altra superficie non sia isolata.

Non essendovi alcuna resistenza all'unione delle due potenze, non vi può essere accumulazione, o condensazione delle medesime.

Quindi la scarica si farà senza strepito e graduatamente per una corrente formata fra la punta e la superficie. Così quando una nuvola elettrica, e la superficie della terra direttamente sotto la nuvola sono cariche con potenze contrarie, queste potenze si attraggono attraverso lo strato d'aria frapposto. Si osserva, che qualunque sia la quantità delle potenze elettriche contenute nelle superficie opposte tutto si scarica senza strepito, se la nuvola si accosta ad un corpo puntuto comunicante col suolo. Se un corpo conico puntuto si inserisse in un cono simile cavo, formato in un solido elettrico, le superficie de' due coni essendo dovunque equidistanti, succederebbe la medesima scarica delle elettricità nè più nè meno, che se le due superficie coniche si appianassero, e si tenessero alla stessa distanza.

Per accrescere la forza di una carica, si uniscono alcune volte insieme molte lastre elettriche. Il metodo ordinario si è di formare una comunicazione fra le superficie

interne di molte boccie veſtite, ed un' altra comunicazione fra le loro veſti eſteriori. Le boccie così diſpoſte ſi chiamano una *batteria*, i di cui effetti ſono eſattamente ſimili a quelli di una ſola lamina della medeſima groſſezza delle boccie, e contenente la ſteſſa quantità di ſuperficie.

ESP. XXXIII.

Se un' ampia batteria ſi ſcarica attraverſo un tenue filo metallico, il filo ſi fa in pezzi, o ſi fonde.

La polvere da ſchioppo, e lo ſpirito di vino ſi accendono, ſe fanno parte del circuito. E ſe la ſcarica ſi fa attraverſo una foglia d'argento ſerrata fra due laſtre di vetro, il vetro ſi ſpezza e ſi trova macchiato dall'argento, che viene ſcagliato dalla forza della ſcarica dentro la ſoſtanza del vetro.

ESP. XXXIV.

Se una batteria ſi ſcarica attraverſo un quinterno di carta, queſto reſta traforato, e ciaſcun foglio compariſce ſpinto dal mezzo verſo i foglj eſteriori.

ESP. XXXV.

Se ſi caricano due laſtre elettriche, e ſi forma una comunicazione fra la ſuperficie vitrea di una laſtra, e la ſuperficie reſinoſa dell'altra, non ſuccede ſcarica alcuna, qualora non ſi formi una comunicazione fra le altre due ſuperficie nel medeſimo tempo.

L'elettricità naturale dell'atmosfera ſi ſcarica aſſai ſpeſſo nella maniera ſeguente: due nuvole eſſendo elettrizzate con elettricità oppoſte, le ſuperficie della terra che corriſpondono immediatamente al di ſotto, ſono parimente elettrizzate con potenze contrarie a quelle delle nuvole reſpettive al di ſopra, e l'umidità della terra formando una comunicazione fra le due contigue ſuperficie cariche. ogniqualvolta le due nuvole ſi incontrano, ſuccede una ſcarica così delle nuvole, come delle ſuperficie della terra oppoſte alle medeſime. Se la terra è aſciutta, e conſeguentemente reſiſte all'azione delle due elettricità accumulate ſulle ſue ſuperficie, ſuccede un'eſploſione nella terra non meno che nell'atmosfera, la quale produrrà ſcuotimenti ed altri fenomeni di frequente oſſervati nelle ſtagioni aſciutte particolarmente in que' climi, che ſono più degli altri ſoggetti ai temporali.

SEZIONE IV.

MAGNETISMO.

ESPERIMENTO I.

UNa ſottile verga di ferro eſattamente equilibrata ſi ſoſpenda ſopra un punto per modo da poterſi liberamente rivolgere in un piano parallelo all' orizzonte: ſe la verga ſi tocca con una calamita, un' eſtremità della verga ſi dirigerà ſempre al Nord.

Quella potenza, che dalla calamita viene comunicata al ferro, ſi nomina *Magnetiſmo*; una verga di ferro, imbevuta di queſta potenza, ſi chiama *magnetica* o *calamitata*: Il Magnetiſmo viene comunicato al ferro così dalle verghe calamitate, come dalla calamita medeſima: Le verghe di ferro diventano magnetiche colla frizione, coll' eſſer tenute per lungo tempo nella ſteſſa poſizione, e coll' elettricità, ſenza alcun ſoccorſo della calamita, o del ferro calamitato. L' ago magnetico non mira eſattamente al

nord, ma si osserva, ch' ei muta il suo azimut, dirigendosi alcune volte all'est, ed alcune altre all' ovest del meridiano. Gli estremi d'un ago magnetico sono chiamati *Poli*. Un circolo verticale nel Cielo, che interseca l'orizzonte ne' punti, ai quali si dirige l' ago magnetico quando è in quiete, si denomina *meridiano magnetico*.

ESP. II.

Se il polo boreale d' una verga magnetica si colloca sul punto di sospensione di un ago, e si fa strisciare sull' ago verso l' una o l' altra estremità, quella parte dell' ago, che è tocca dalla verga magnetica, si dirige al sud.

ESP. III.

Se il polo australe d' una verga magnetica si colloca sul punto di sospensione di un ago, e si fa correre sull' ago verso uno de' due estremi; la parte tocca dell' ago si volge al nord.

ESP. IV.

Sì l' uno, che l' altro polo d' un ferro magnetico tira il ferro che non è magnetico.

ESP. V.

I poli boreali di due ferri magnetici contigui si respingono.

ESP. VI.

I poli australi di due ferri magnetici contigui si respingono.

ESP. VII.

I poli contrarj di due ferri magnetici fortemente si attraggono.

ESP. VIII.

Il magnetismo boreale osservasi distrutto dalla comunicazione del magnetismo australe, e vice versa.

Di qui si scorge, che le due specie di magnetismo operano in tal maniera da contrabbilanciarsi vicendevolmente: che se ambedue si comunicano al braccio di un ago, l'effetto totale sarà soltanto la loro differenza, e sarà di quella specie che è la più forte.

Quindi è facile il rovesciare i poli del ferro calamitato

ESP. IX.

Si equilibri esattamente e si sospenda un ago per modo, che possa liberamente rivolgersi in un piano verticale: se quest' ago si renderà magnetico, quando si trova orizzontale, il polo boreale si abbasserà, e il polo australe si innalzerà sopra l' orizzonte.

EPS. X.

La scarica delle potenze elettriche attraverso un' ago gli comunica il magnetismo, qualora la carica sia sufficiente.

Proprietà Generali del Magnetismo.

1. Nessuna sostanza è capace di comunicare, e ricevere il magnetismo a riserva della calamita, e del ferro.
2. Ogni verga magnetica ha due poli.
3. I poli simili delle verghe magnetiche si respingono
3. Sì l' uno che l' altro polo attrae il ferro non magnetico.
4. I poli contrarj delle verghe magnetiche si attraggono fortemente.
6. Le proprietà dell' elettricità, e del magnetismo sono per alcuni riguardi analoghe. Vedi Elettricità Esp. X. e XVI.

SEZIONE V.

OTTICA.

ESPERIMENTO I.

I Raggi di luce partono da' corpi luminosi in linee rette, ed in tutte le direzioni.

Convengono generalmente i Filosofi, che la luce consiste in minutissime particelle di materia, le quali per qualche potenza, di cui si ignora la causa, vengono scagliate da' corpi luminosi in linee rette, ed in tutte le direzioni.

Le particelle di luce che si succedono l'una all'altra in una linea retta, costituiscono un raggio di luce considerato in senso matematico; ma fisicamente parlando un raggio è la più picciola visibile porzione di luce separata dal resto.

Un raggio di luce venendo distornato dal suo corso con cadere sopra un corpo liscio, attraverso cui egli non passa, si dice riflettuto da quel corpo.

L'angolo compreso fra il raggio incidente, ed una linea condotta perpendicolarmente alla superficie dal punto, su cui il raggio cade, chiamasi angolo d'incidenza.

L'angolo compreso fra la perpendicolare, e il raggio riflesso si nomina angolo di riflessione.

ESP. II.

I raggi incidente, e riflesso sono nel medesimo piano, e gli angoli d'incidenza, e di riflessione sono eguali.

I raggi non urtano nella superficie riflettente, venendo distornati dal loro cammino prima di giugnervi da una potenza, la quale è contigua alla superficie, ed opera in una direzione perpendicolare ad essa.

ESP. III.

I raggi di luce partono dai corpi illuminati in linee rette, ed in tutte le direzioni.

Le superficie di que' corpi, che costano di parti ineguali ed irregolari, riflettono la luce in tutte le direzioni.

Un raggio di luce venendo distornato dal suo cammino con cadere obliquamente sopra la superficie di un mezzo

trasparente, attraverso il quale passa, si dice rifratto da quel mezzo: l'angolo contenuto fra il raggio incidente, ed una perpendicolare alla superficie, condotta dal punto su cui cade il raggio, si chiama angolo d'incidenza: l'angolo contenuto tra il raggio refratto, e la perpendicolare suddetta si nomina angolo di refrazione.

La differenza degli angoli d'incidenza e di refrazione è l'angolo, per cui il raggio devia dalla sua originale direzione, ed è chiamato angolo di deviazione.

I raggi di luce vengono refratti da una potenza contigua alla superficie rifrangente.

I raggi di luce, che vengono piegati nel loro corso con passar vicino agli angoli taglienti de' corpi, diconsi *inflessi* verso que' corpi.

ESP. IV.

Quando un raggio cade obliquamente sulla superficie d'un mezzo più denso, viene refratto verso la perpendicolare: un raggio, che cade obliquamente sulla superficie di un mezzo più raro, per cui passa attraverso, viene refratto con recesso dalla perpendicolare.

Un raggio, che cade perpendicolarmente sulla superficie rifrangente, non è distornato dal suo cammino, ma

prosiegue nella medesima direzione col raggio incidente: Fintantochè un raggio si muove nello stesso mezzo uniforme, non cangia direzione.

I principj dell' Ottica si dimostrano nel supposto, che la luce sia una sostanza omogenea; e sebbene la luce trovisi composta di differenti specie di raggi, nulladimeno i principj della rifrazione, e riflessione ec. sono matematicamente veri quando sono applicati ai raggi di una specie qualunque.

ESP. V.

Quando un raggio di luce viene refratto nel passare dall' aria in un dato mezzo, o da un dato mezzo nell' aria, il seno dell' angolo d' incidenza sta al seno dell' angolo di refrazione in una data ragione.

Se il raggio di luce viene refratto passando dall' aria nel vetro, il seno d' incidenza sta al seno di refrazione come 31: 20., ovvero come 3: 2. all' incirca; dall' aria nell' acqua come 4: 5. Onde il seno d' incidenza sta al seno di refrazione, quando un raggio passa dall' acqua nel vetro come $\frac{3}{4}$: $\frac{20}{31}$, ovvero come 93: 80.

ESP. VI.

Un raggio di luce non può passare da un mezzo più denso in uno più raro, se l'angolo d'incidenza eccede un certo limite.

Questo limite è l'angolo, il di cui seno sta al raggio come il seno d'incidenza sta al seno di refrazione dal più denso nel più raro. Così un raggio di luce non passerà dall'acqua nell'aria se l'angolo d'incidenza supera 48.° 36′, il di cui seno è $\frac{3}{4}$ del raggio, o seno tutto.

Un raggio di luce non passerà dal vetro nell'aria, se l'angolo d'incidenza eccede 40.° 11′, il di cui seno è $\frac{20}{31}$ parti del raggio; ovvero dal vetro nell'acqua, se l'angolo d'incidenza eccede 59.° 20′ in circa.

ESP. VII.

Quando un raggio di luce viene refratto passando da un mezzo più raro in uno più denso, se l'angolo d'incidenza cresce, cresce altresì l'angolo di deviazione.

Rappresentino *i*, *r*, *d* le minime contemporanee variazioni degli angoli d'incidenza, refrazione, e deviazio-

ne; noi abbiamo dalle proprietà di tali angoli $i = r + d$, e $d = i - r$; ma il minimo incremento d' incidenza sta all' incremento contemporaneo di refrazione come la tangente d' incidenza alla tangente di refrazione; dunque i è maggiore di r; conseguentemente essendo d positivo, l' angolo di deviazione ordinariamente crescerà crescendo l' angolo d' incidenza.

Lo stesso raziocinio può applicarsi a dimostrare, che quando un raggio di luce viene refratto nel passare da un mezzo più denso in uno più raro, crescendo l' angolo di incidenza cresce parimente l' angolo di deviazione.

Un prisma è un solido terminato da tre parallelogrammi rettangoli, e da due triangoli uguali e paralleli.

Una linea tirata attraverso il prisma parallela alle intersezioni de' parallelogrammi si chiama asse del prisma.

ESP. VIII.

Un raggio di luce, che passa per un prisma più denso perpendicolarmente all' asse viene refratto verso la parte più grossa del prisma.

L' angolo compreso fra i lati del prisma, pel quale il raggio passa, si chiama angolo rifrangente.

Si suppone sempre negli sperimenti ottici, che quando un raggio è refratto da un prisma, i raggi incidente ed emergente sieno perpendicolari all' asse.

ESP. IX.

Se gli angoli d'incidenza, sotto cui un raggio di luce incontra la superficie di un prisma di vetro, sono piccioli, la deviazione del raggio dal suo cammino primiero dopo la refrazione s'uguaglia in circa alla metà dell' angolo rifrangente.

Due angoli diminuendosi senza limite possono svanire in qualunque data ragione, e i loro seni svaniranno nella stessa ragione. Questa è una proposizione matematica; ma in pratica sebbene due angoli non sieno evanescenti, purchè essi non eccedano pochi minuti, le ragioni degli archi, e de' seni sono tanto davvicino le stesse, che negli sperimenti, che ne dipendono, non si può scorgere alcuna sensibile differenza sia che prendasi la ragione degli archi, sia la ragione de' seni; così se due archi sono 8', e 4', i seni sono come 23271 a 11636 a un dipresso, che differisce pochissimo dalla ragione di 8: 4.

Cor. I. In generale sia I = all'angolo d'incidenza, R = all'angolo di refrazione dal mezzo più raro nel più denso, e D = all' angolo di deviazione dopo le due refrazioni, V = all'angolo rifrangente del prisma; pertanto, se gli angoli d' incidenza sono picciolissimi, D = $\frac{V(I-R)}{R}$: nello stesso prisma

adunque l'angolo di deviazione rimane lo ſteſſo, comunque variino gli angoli d'incidenza ſulle ſuperficie (eſſendo però ſempre piccioli).

Cor. II. In diverſi priſmi formati della ſteſſa ſoſtanza l'angolo di deviazione D è proporzionale agli angoli rifrangenti dei priſmi.

Una lente doppiamente conveſſa è un ſolido contenuto fra due ſegmenti di ſuperficie sferiche.

Una linea congiugnente i centri delle ſuperficie sferiche ſi chiama aſſe della lente.

E S P. X.

Vi ha un punto in ogni lente doppiamente conveſſa, pel quale ſe paſſa un raggio, diventano paralleli i raggi incidente ed emergente, comunque ſia inclinato all'aſſe della lente il raggio incidente. Queſto punto chiamaſi centro della lente.

Se ſi guidano delle tangenti alla lente nei punti d'incidenza ed emergenza in un piano dato qualunque, queſte tangenti ſono parallele.

Se la lente è ſottiliſſima, e ſe la direzione del paſſaggio del raggio non è molto inclinata all'aſſe, i raggi incidente ed emergente ſi trovano preſſo a poco nella ſteſſa linea retta.

Si dee ſupporre, che le lenti, priſmi, ec. adoperati nelle ſperienze ottiche ſieno formati di ſoſtanze traſparenti più denſe del mezzo, per cui ſcorrono i raggi prima di giugnere alle ſuperficie rifrangenti. Queſte ſoſtanze ſono ordinariamente il vetro, o l' acqua.

ESP. XI.

Un raggio di luce cadendo ſopra una lente conveſſa viene piegato dalla refrazione verſo l' aſſe, quando l' inclinazione del raggio incidente all' aſſe non ſia grandiſſima.

Un raggio di luce cadendo ſopra qualſivoglia ſuperficie curva viene rifratto e rifleſſo nella ſteſſa maniera che ſe cadeſſe ſopra una ſuperficie piana, la quale toccaſſe la curva nel punto d' incidenza: perciò è la ſteſſa coſa o che un raggio ſia rifratto da una lente, o ſia refratto da un priſma, i di cui lati tocchino la lente ne' punti, pe' quali paſſa il raggio.

ESP. XII.

Se un raggio di luce cadendo quaſi parallelo all' aſſe viene refratto da una lente di vetro, eſſo

devia tanto maggiormente dalla ſua prima direzione, quanto più lungi dal centro cade ſulla lente.

Se ſi concepiſce, che i lati di un priſma tocchino la lente ne' punti, pe' quali paſſa il raggio, l' angolo al vertice del priſma ſarà tanto più grande, quanto più lontani ſono que' punti dall' aſſe della lente; e conſeguentemente per l' Eſp. IX. l' angolo di deviazione ſarà tanto più grande.

ESP. XIII.

Se un raggio di luce viene refratto da un mezzo terminato da ſuperficie parallele, i raggi incidente ed emergente ſono paralleli.

Le ſuperficie nei punti d' incidenza ed emergenza ſi ſuppongono qui parallele.

Una tenue porzione di raggi, ſeparata dal reſto, ſi chiama pennello di raggi.

I pennelli di raggi ſono d' ordinario cilindrici o conici; l' aſſe del pennello è lo ſteſſo che l' aſſe del cono o cilindro.

ESP. XIV.

I raggi paralleli, che cadono ſopra una ſuperficie piana riflettente, ſono riflettuti paralleli.

ESP. XV.

Se un pennello di raggi paralleli cade perpendicolarmente ſopra un riflettente sferico, il fuoco de' raggi rifleſſi divide per mezzo la diſtanza fra la ſuperficie e il centro.

I fuochi ſono que' punti, da' quali i raggi di luce divergono, o a' quali convergono.

Se i raggi paralleli cadendo ſopra una ſuperficie riflettente, o rifrangente vengono a divergere da un dato punto, queſto punto ſi nomina *fuoco principale*.

La diſtanza tra il fuoco principale, e la ſuperficie del corpo rifrangente, o riflettente chiamaſi *lunghezza focale principale*.

Un riflettente sferico ſi ſuppone eſſere un ſegmento di una ſuperficie sferica.

Una linea tirata pe' centri della sfera, e del circolo minore, il quale termina il riflettente sferico, ſi dimanda aſſe.

Nella determinazione delle lunghezze focali, ſi ſuppone, che l'aſſe del pennello de' raggi incidenti paſſi pe' centri delle ſuperficie rifrangenti, e riflettenti; e le concluſioni matemathiche ſeguenti ſono ſoltanto vere di que' raggi, che ſono contigui agli aſſi; ma l' eſperienza non ammette un conſiderabil divario dalle mentovate limitazioni.

ESP. XVI.

Se de' raggi divergenti, o convergenti cadono ſopra una ſuperficie sferica riflettente, la diſtanza del fuoco de' raggi incidenti dal fuoco principale, la metà del ſemidiametro del riflettente, e la diſtanza tra il fuoco principale e il fuoco de' raggi rifleſſi ſono in proporzione continua.

Suppongaſi, che il riflettente ſia concavo, e che i raggi divergano da un fuoco, la di cui diſtanza dalla ſuperficie è $= d$.

Sia il ſemidiametro del riflettente $= r$; noi abbiamo per la regola precedente $d - \frac{r}{2} : \frac{r}{2} :: \frac{r}{2} : \frac{r^2}{4d - 2r} =$ alla diſtanza tra il fuoco de' raggi rifleſſi, e il fuoco principale.

Il fuoco de' raggi rifleſſi è in queſto caſo tra il fuoco principale e il centro del riflettente; perlocchè aggiungendo $\frac{r}{2}$ alla quantità ultimamente ritrovata, abbiamo $\frac{r^2}{4d-2r} + \frac{r}{2} = \frac{2r^2 + 4dr - 2r^2}{8d - 4r} = \frac{dr}{2d - r}$ per la diſtanza del fuoco de' raggi rifleſſi dalla ſuperficie.

Queſta ſoluzione ſi eſtende a tutti i caſi di fuochi formati colla rifleſſione da una ſuperficie sferica cangiando il ſegno di r quando il riflettente è conveſſo, e di d quando i raggi convergono ad un punto, la di cui diſtanza dalla ſuperficie è d: così ſe i raggi convergono ſopra un riflettente concavo, il di cui ſemidiametro è di 30. pollici, e il fuoco de' raggi convergenti è 10. pollici diſtante dalla ſuperficie, la lunghezza focale ricercata ſarà $\frac{-dr}{-2d-r}=\frac{dr}{2d+r}$, nel preſente caſo $=\frac{30\times 10}{30+20}=6$.

La diſtanza fra la ſuperficie del riflettente, e il fuoco de' raggi rifleſſi ſi nomina lunghezza focale.

ESP. XVII.

I fuochi de' raggi incidenti, e rifleſſi ſono ſempre dalla ſteſſa parte del fuoco principale.

Se il fuoco de' raggi incidenti ſi muove lungo l' aſſe del riflettente, il fuoco de' raggi rifleſſi ſi moverà nella direzione oppoſta, e i fuochi ſi incontreranno nella ſuperficie e nel centro.

ESP. XVIII.

I raggi paralleli paſſando per una o più ſuperficie piane rifrangenti, comunque inclinate, emergono paralleli.

E S P. X I X.

La diſtanza del centro di una sfera di vetro dal fuoco principale de' raggi in eſſa refratti è a un dipreſſo eguale ad un ſemidiametro e mezzo della sfera.

1. In generale ſia $r =$ al ſemidiametro della sfera, i ſeni d' incidenza e di refrazione ſieno I, ed R, la diſtanza del fuoco principale dal centro della sfera $= \frac{Ir}{2I - 2R}$

2. I raggi paralleli, che paſſano per un globo d'acqua, ſono raccolti in un fuoco, la di cui diſtanza dal centro è uguale al diametro della sfera.

3. Se un pennello di raggi paralleli cade ſopra una ſuperficie sferica rifrangente, noi abbiamo la ſeguente proporzione: come la differenza de' ſeni d'incidenza, e rifrazione ſta al ſeno d'incidenza, così ſta il ſemidiametro della ſuperficie alla diſtanza fra la ſuperficie ed il fuoco de' raggi refratti; dunque I, ed R ſignificando ſecondo il ſolito, ed r eſſendo il ſemidiametro della ſuperficie conveſſa di un mezzo più denſo, noi abbiamo la lunghezza focale principale $= \frac{Ir}{I-R}$.

ESP. XX.

Un pennello di raggi paralleli cadendo ſopra una lente doppiamente conveſſa, terminata da ſuperficie, i ſemidiametri delle quali ſono eguali, ſi oſſerva unirſi in un fuoco, la di cui diſtanza dalla lente è preſſo a poco eguale al ſemidiametro di una delle due ſuperficie.

Se i raggi delle ſuperficie ſono ineguali, e i ſeni d' incidenza e refrazione ſono I, ed R, abbiamo la regola ſeguente.

Troviſi la lunghezza focale principale dopo la refrazione nella prima ſuperficie, e ſarà come la diſtanza tra i centri delle ſuperficie al ſemidiametro della ſeconda ſuperficie, così la differenza tra la lunghezza focale principale prima ritrovata, e il ſemidiametro della prima ſuperficie alla lunghezza focale ricercata.

Suppongaſi la lente doppiamente conveſſa.

Sia il ſemidiametro della prima ſuperficie $= r$.

Il ſemidiametro della ſeconda ſuperficie $= \varsigma$.

Dunque la principal lunghezza focale della prima ſuperficie $= \frac{Ir}{I-R}$; e noi abbiamo per la proporzione ſum-

mentovata $r + \varsigma : \varsigma :: \frac{Ir}{I-R} - r : \frac{Rr\varsigma}{(I-R)(r+\varsigma)}$ = alla lunghezza focale principale della lente.

Queſta ſoluzione ſi eſtende alle lunghezze focali principali delle lenti, la di cui groſſezza è poco conſiderabile, cangiandoſi i ſegni di r, e ς quando le ſuperficie sono concave in vece di eſſer conveſſe; ſe l'una, e l'altra ſuperficie è piana, il ſemidiametro della medeſima diventa infinito, nel qual caſo le quantità finite aggiunte ad eſſo, o ſottratte ſvaniſcono.

Nel vetro la lunghezza focale principale è $= \frac{20 r\varsigma}{11 r + 11 \varsigma}$ ovvero $\frac{2 r\varsigma}{r+\varsigma}$ all'incirca; quando $r = \varsigma$ come nell'eſperienza, la principal lunghezza focale $= \frac{2r^2}{2r} = r$. Si ſupponga piana la ſeconda ſuperficie di una lente di vetro, allora ς è infinito, ed $f = \frac{2\varsigma r}{\varsigma} = 2r$, ovvero la lunghezza focale è due volte il ſemidiametro. La lunghezza focale principale è la ſteſſa, qualunque ſia la ſuperficie che ſi preſenta ai raggi incidenti.

ESP. XXI

Sia d = alla diſtanza tra il fuoco de' raggi incidenti, e il centro di una lente, r = alla lun-

ghezza focale principale, f la diſtanza tra il fuoco de' raggi refratti, e la lente; e noi abbiamo la ſeguente proporzione:

come $d - r : r$ così ſta $d : f$.

Se i due ſemidiametri di una lente di vetro ſono r, e ς, ſi è veduto nell'ultima nota, che la principal lunghezza focale ſarà $\frac{20r\varsigma}{11r + 11\varsigma}$, ovvero $\frac{2r\varsigma}{r + \varsigma}$ con ſufficiente eſattezza per la maggior parte delle ſperienze. Sia $d =$ alla diſtanza di un fuoco de' raggi incidenti, f la diſtanza del fuoco de' raggi emergenti dalla lente, e noi abbiamo la ſeguente proporzione, come $d - \frac{2r\varsigma}{r + \varsigma} : \frac{2r\varsigma}{r + \varsigma} :: d : f$; il perchè $f = \frac{2dr\varsigma}{dr + d\varsigma - 2r\varsigma}$.

In parità di tutte le altre coſe, la lunghezza focale ſarà la medeſima, qualunque ſuperficie della lente ſi opponga ai raggi incidenti.

Se la lente ſarà di una qualche ſoſtanza, nella quale i ſeni d'incidenza e di refrazione ſono come $I : R$, in vece di $\frac{2r\varsigma}{r + \varsigma}$ dovremo ſoſtituire l'eſpreſſione generale $\frac{Rr\varsigma}{(I - R)\,(r + \varsigma)}$, e la proporzione diventerà

$$d - \frac{Rr\varsigma}{(I-R)(r+\varsigma)} : \frac{Rr\varsigma}{(I-R)(r+\varsigma)} :: d : f;$$ donde $$f = \frac{Rdr\varsigma}{(I-R)(dr+d\varsigma)-Rr\varsigma},$$ che è una soluzione generale per tutti i casi di lunghezze focali, quando la grossezza della lente non è da considerarsi.

Avendo determinato le proprietà relative ai fuochi de' particolari pennelli di raggi, noi proseguiamo a considerare in qual maniera la combinazione de' fuochi dei pennelli separati formi le immagini o pitture degli oggetti, da cui partono i raggi.

ESP. XXII.

Le immagini formate dalla riflessione da una superficie piana sono erette, simili, ed uguali agli oggetti, e sono tanto lontane per di dietro dalla superficie quanto gli oggetti per davanti.

ESP. XXIII.

Un oggetto immerso nell' acqua comparisce più vicino all' occhio per $\frac{1}{4}$ della sua profondità sotto la superficie dell' acqua.

In generale se i raggi divergono da un oggetto, e cadono sopra una superficie rifrangente andando da un mezzo più denso in un più raro, la distanza dell'immagine sta alla distanza dell'oggetto dalla superficie rifrangente come sta il seno d'incidenza al seno di refrazione nel mezzo più raro.

ESP. XXIV.

Se un oggetto sarà l'arco d'un cerchio avente lo stesso centro con un riflettente sferico, l'immagine sarà un arco simile concentrico; e le grandezze dell'immagine e dell'oggetto staranno nella medesima proporzione che le loro distanze dal centro del riflettente.

Essendo dato $r =$ al semidiametro di un riflettente concavo, $d =$ alla distanza dell'oggetto dalla superficie, noi abbiamo la distanza dell'immagine $= \frac{dr}{2d - r}$, e le grandezze dell'oggetto, e dell'immagine come $2d - r : r$.

Le distanze dell'oggetto, e dell'immagine dal centro del riflettente sono nella stessa proporzione della loro distanza dalla superficie.

ESP. XXV.

Ogni cosa restando come nell' ultimo esperimento, l' immagine si osserva inversa, o diritta per rispetto all' oggetto secondo che l' uno e l' altra sono in parti opposte, o dalla stessa parte del centro del riflettente.

Se l' oggetto si muove lungo l' asse del riflettente, l' immagine si moverà in direzione contraria.

ESP. XXVI.

Un oggetto veduto per riflessione da una superficie sferica convessa, apparisce diminuito.

La grandezza apparente dipende dall' angolo, che l' immagine sottende nell' occhio: nel caso presente l' immagine essendo più vicina al centro che non è l' oggetto, sarà minore dell' oggetto nella stessa proporzione.

ESP. XXVII.

Le immagini di oggetti piani veduti per riflessione da una superficie liscia cilindrica non so-

no ſimili agli oggetti: parimenti gli oggetti piani apparentemente diſtorti compariſcono dopo la predetta rifleſſione nella loro propria proporzione.

ESP. XXVIII.

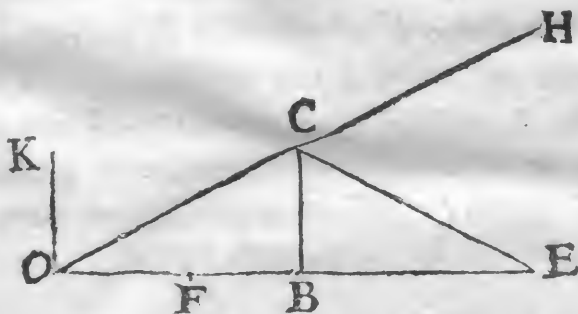
Se l' arco di un circolo, il di cui centro coincide col centro di una lente doppiamente conveſſa, ſi conſidera come un oggetto, l' immagine ſarà un arco ſimile all' oggetto, e le grandezze dell' oggetto, e dell' immagine ſaranno come le loro diſtanze dal centro della lente.

Le proprietà di tutte le lenti per riguardo alla lunghezza focale, data che ſia la lunghezza focale *principale*, ſono le medeſime. Perlocchè ſia r la lunghezza focale principale, d la diſtanza di un oggetto dalla lente; e ſarà la diſtanza dell'immagine dalla lente $= \frac{dr}{d-r}$ qualunque ſieno i ſemidiametri delle ſuperficie.

In parità di tutte le altre coſe, neſſuna differenza ſi oſſerva nella lunghezza focale, qualunque ſia la ſuperficie oppoſta ai raggi incidenti.

La grandezza, la poſizione, la diſtanza dell' immagine della lente rimangono le ſteſſe, qnalunque ſia la figura

dell'apertura, per cui paſſano i raggi. La chiarezza dell' immagine ſarà come l'area dell' apertura, quando la grandezza dell'immagine è data.

L'immagine di una linea retta formata da una lente non è rettilinea, ma coincide con una delle ſezioni coniche, che ſi determina colla ſeguente coſtruzione.

Rappreſenti *B* il centro, *OE* l' aſſe, ed *FB* la lunghezza focale principale di una lente doppiamente conveſſa: una linea retta *OK* tirata perpendicolarmente all' aſſe ſi conſideri come un oggetto.

Guidiſi $BC = BF$ ad angoli retti ſopra *BO*; congiungaſi *CO*, e ſi prolunghi, ed al punto *C* ſi faccia l'angolo $HCE = BCO$; *B*, ed *E* ſaranno i fuochi della ſezione conica, la quale coincide coll' immagine, e che ha per aſſe maggiore $BC + CE$.

Cor. I. Eſſendo il punto *F* fra *B*, ed *O*, la ſezione è un'elliſſe.

Cor. II. Se O coincide con F, OCB, ed ECH ſaranno ciaſcuno di 45 gradi, e BCE retto: perciò CE ſarà parallela a BE, ovvero E ſarà ad una diſtanza infinita. La ſezione conica è in queſto caſo una parabola.

Cor. III. Se OB è minore di BC, BCE diventerà maggiore d' un angolo retto, e conſeguentemente E paſſerà dalla parte oppoſta di B, nel qual caſo la ſezione ſarà un' iperbola. Queſte proprietà ſi deducono dai principj delle ſezioni coniche, e delle lunghezze focali.

Cor. IV. Si ſupponga $OB = d$, $BC = p$, noi abbiamo ſimilmente dalle proprietà delle ſezioni coniche il ſemiaſſe maggiore della ſezione $= \frac{d^2 p}{d^2 - p^2}$ ed il ſemiaſſe minore $= \frac{dp}{\sqrt{(d^2 - p^2)}}$

Cor. V. Il parametro principale della ſezione è ſempre uguale a due volte la lunghezza focale principale della lente.

Cor. VI. L' immagine di una linea retta lontaniſſima è un circolo, il di cui diametro è uguale alla principale lunghezza focale della lente.

Cor. VII. Qualunque ſia la grandezza o figura dell' immagine di una linea retta formata da una data lente. quella parte dell' immagine, che è contigua all' aſſe, avrà ſempre la ſteſſa curvatura di un circolo, il di cui ſemidiametro è uguale alla principal lunghezza focale della lente.

Questi principj si applicano facilmente alle immagini di una linea retta formate per riflessione dalle superficie sferiche.

ESP. XXIX.

Gli oggetti veduti per una lente doppiamente concava compariscono impiccioliti.

La grandezza apparente di un oggetto veduto attraverso lenti di ogni specie si determina dall' angolo, che l' immagine sottende all' occhio.

La grandezza apparente dell' immagine dipende da due circostanze: 1.° dalla grandezza reale; 2.° dalla distanza dell' occhio da essa; dal che noi possiamo derivare una misura dell' apparente grandezza degli oggetti veduti per qualsivoglia data lente.

L' immagine essendo picciola in paragone della sua distanza dall' occhio, sottenderà un' angolo all' occhio che sta direttamente come la lunghezza dell' immagine, ed inversamente come la distanza dell' occhio da quella.

Sia $d =$ alla distanza di un oggetto da una lente doppiamente concava, $r =$ alla lunghezza focale principale; la distanza dell' immagine dalla lente sarà $\frac{dr}{d+r}$ dalla stessa parte coll' oggetto. Sia $e =$ alla distanza dell' occhio

della lente; quindi, ſecondo i principj precedenti l'angolo ſotteſo dall' oggetto veduto ad occhio nudo ſtarà a quello, ſotto cui appariſce guardato per una lente come $\frac{d}{d+e}$ a $\frac{dr}{d+r}$ diviſo per $e + \frac{dr}{d+r}$, ovvero come $dr + er + ed : dr + er$.

Egli è evidente, che l'ultima quantità debb'eſſere minore della prima; perlocchè l'oggetto comparirà impicciolito ogni qualvolta la lente non ſia contigua all' oggetto, o all'occhio.

ESP. XXX.

Un oggetto veduto per una lente doppiamente conveſſa comparirà ingrandito, ſe la ſua diſtanza dalla lente è minore della lunghezza focale principale.

Sia $d =$ alla diſtanza dell'oggetto dalla lente: e la diſtanza dell'occhio, r la lunghezza focale principale: perciò l'angolo ſotteſo dall' oggetto veduto ad occhio nudo ſtarà a quello, ſotto cui appariſce quando ſi guarda per la lente, come ſta $re + dr - ed : re + dr$, delle quali quantità l'ultima eſſendo ſempre maggiore della prima, l'oggetto dee comparire ingrandito, qualora la lente non ſia contigua all' oggetto, o all' occhio.

La diſtanza dell' occhio dalla lente obbiettiva ſia e, la lunghezza focale principale della lente obbiettiva $= r$; dunque per la nota all'Eſp. XXX. l' angolo ſotteſo dall' oggetto veduto ad occhio nudo ſtarà a quello, ſotto cui appariſce veduto col teleſcopio come $e - r : r$, cioè come la lunghezza focale principale del vetro oculare a quella del vetro obbiettivo.

ESP. XXXII.

Un oggetto minuto veduto con una lente di picciolissima lunghezza focale principale, compariſce ingrandito e diſtinto, ſe l' oggetto è collocato nel fuoco principale.

L' angolo, ſotto cui l' oggetto appariſce, ſtarà a quello che eſſo ſottende, quando è guardato ad occhio nudo, come la diſtanza, alla quale è veduto ad occhio nudo diſtintamente, ſta alla principal lunghezza focale della lente.

Se la lunghezza focale principale della lente non eccede $\frac{1}{50}$ di un pollice, e la diſtanza, a cui l' occhio può vedere diſtintamente, è di circa ſei pollici, ne ſegue, che la lente ingrandirà circa 300. volte in diametro.

In queſto eſperimento i raggi partendo da qualſiſia pun-

Così se la principal lunghezza focale di un vetro da leggere sia di 12 pollici, la distanza della lente da un' oggetto veduto per essa di 4 pollici, e dall' occhio di 6, l' oggetto comparisce ingrandito nella proporzione di $12 \times 6 + 4 \times 12$ a $12 \times 6 + 4 \times 12 - 4 \times 6$, ovvero di 5 a 4.

La stessa proporzione ha luogo quando l' oggetto essendo posto ad una distanza dalla lente maggiore della principal lunghezza focale, l' occhio è situato fra la lente e l' immagine; il perchè quando $d = r$, cioè quando l' oggetto è posto nell' fuoco principale, l' angolo sotteso da esso all' occhio nudo starà a quello, sotto cui apparisce guardandolo attraverso la lente, come r ad $r + e$, cosicchè la grandezza apparente dell' immagine avrà tanto maggior proporzione a quella dell' oggetto, quanto più l' occhio si discosta dalla lente,

Allorchè l' immagine è fra l' occhio, e la lente, la proporzione summentovata, diventerà $de - er - dr$ ad $er + dr$, e quando d è molto grande, come $e - r$ ad r. Laonde un oggetto distantissimo, come il sole, la luna ec. non apparirà nè ingrandito, nè impicciolito, guardandolo attraverso una lente doppiamente convessa, se la distanza dell' occhio dalla lente sarà uguale a due volte la principal lunghezza focale: se la distanza dell' occhio sarà maggiore, l' oggetto comparirà impicciolito, se minore ingrandito.

L' immagine, e l' oggetto saranno diritti, o inversi, l' uno

per riguardo all'altro, ſecondo che eſſi ſono dalla ſteſſa parte, o dalle parti oppoſte della lente: quindi tutte le immagini reali debbono eſſere inverſe per riguardo agli oggetti.

Se r rappreſenta la lunghezza focale principale della lente, d la ſua diſtanza dall' oggetto, la grandezza lineare dell'immagine ſarà a quella dell'oggetto come $\frac{dr}{d-r} : d$, ovvero come $r : d - r$.

Cor. di qui ſegue, che ſe l'oggetto ſarà collocato ad una diſtanza di due volte la principal lunghezza focale dalla lente, l'immagine ſi formerà alla ſteſſa diſtanza, e ſarà in conſeguenza uguale all' oggetto.

ESP. XXXI.

L'angolo, ſotto cui ſi vede un oggetto lontaniſſimo attraverſo un teleſcopio compoſto di due lenti doppiamente conveſſe, ſta all' angolo, ſotto cui ſi vede lo ſteſſo oggetto ad occhio nudo, come ſta la principal lunghezza focale della lente obbiettiva alla principal lunghezza focale della lente oculare.

In queſta ſorte di teleſcopj la diſtanza tra le due lenti è uguale alla ſomma delle loro lunghezze focali principali.

to dell' oggetto emergeranno dalla lente paralleli, ed essendo raccolti in un fuoco sulla retina dell' occhio, renderanno l' immagine distinta: la naturale struttura dell' occhio è tale da raccogliere i raggi, che cadono sopra di esso quasi paralleli, in un fuoco sulla retina, dove le immagini degli oggetti, da cui partono i raggi, vengono distintamente formate. Alcune volte accade, che l' occhio per una convessità troppo grande fa convergere ogni pennello ad un fuoco prima di giugnere alla retina, e conseguentemente i raggi, che vengono da ciascun punto di un oggetto non si uniscono in un punto corrispondente sulla retina, ma sono disposti sopra un picciolo circolo, onde l' oggetto è imperfettamente rappresentato, ed i piccioli cerchi anzidetti mescolandosi insieme accrescono la confusione della vista. L' applicazione di una lente concava propriamente adattata all' occhio allontana di più il fuoco di ciascun pennello dall' oggetto, e lo fa cadere esattamente sulla retina.

Un difetto contrario deriva quando l' occhio diventa così appianato da raccogliere i raggi ne' fuochi dietro la retina cagionando una confusione di vista simile alla prima. A ciò si rimedia con una lente convessa, la quale ajuta l' occhio nell' unire i raggi, portando i fuochi dei diversi pennelli più da presso all' oggetto, ed in tal modo con formare l' immagine sopra la retina rende la visione distinta.

Quanto alla ſtruttura dell' occhio (li di cui umori coſtituiſcono una lente compoſta), e agli uſi delle ſue varie parti, la ſezione anatomica ſomminiſtrerà idee più adequate che una pura deſcrizione.

ESP. XXXIII.

I piccioli oggetti poſſono vederſi diſtinti e ingranditi attraverſo una combinazione di due o più lenti.

Queſte combinazioni di lenti ſi chiamano microſcopj compoſti, de' quali ſonovi molte diverſe coſtruzioni.

ESP. XXXIV.

Se un oggetto minuto traſparente illuminato da' raggi del Sole ſi colloca avanti una picciola lente ad una diſtanza da eſſa un poco maggiore della diſtanza del fuoco principale, verrà deſcritta ſopra una tavola propriamente adattata l' immagine diſtinta e ingrandita.

Se la diſtanza dell' oggetto dalla lente ſia d, e la lunghezza focale principale della lente $= r$, la diſtanza

della tavola o dell' immagine della lente sarà $\frac{dr}{d-r}$, e la grandezza lineare dell' oggetto sarà a quella dell' immagine come $d : \frac{dr}{d-r}$, ovvero come $d-r : r$.

Su questo principio è costruito il microscopio solare.

ESP. XXXV.

Un raggio della luce solare venendo refratto da un prisma di vetro si separa in raggi di differenti colori.

Questi colori sono il rosso, l' arancio, il giallo, il verde, l' azzurro, l' indaco, e il violetto, e si chiamano colori prismatici da questa esperienza.

I raggi separati deviano inegualmente dal cammino del raggio incidente, perlocchè diconsi essere diversamente refrangibili. La refrangibilità de' raggi corrisponde all' ordine, in cui i colori appariscono nello spettro prismatico, dove il rosso è refratto il meno di tutti, e il violetto il più: uno qualunque de' sette colori separato dal resto si chiama raggio omogeneo, ovvero luce omogenea.

ESP. XXXVI.

La luce omogenea non ſi può ulteriormente ſeparare, o alterare in riguardo a' ſuoi colori per mezzo della refrazione per qualſiſia numero di priſmi.

ESP. XXXVII.

Un raggio di luce paſſando per un mezzo uniforme terminato da ſuperficie parallele non viene punto ſeparato in colori.

Si oſſerva ſempre, che quando i raggi omogenei dopo eſſere ſtati ſeparati da un raggio comune di luce ſono obbligati per la refrazione ſuſſeguente ad emergere paralleli, i raggi emergenti ſono ſenza colori: in queſto eſperimento i raggi omogenei dopo la ſeconda refrazione emergono paralleli.

ESP. XXXVIII.

Que' raggi, che ſono più di tutti riſrangibili, ſono anco i più rifleſſibili.

Il ſeno d'incidenza ſta al ſeno di refrazione ne' raggi roſſi che paſſano dal vetro nell' aria come 50: 77; il perchè ſaranno eſſi riflettuti dalla ſuperficie del vetro allorchè l'angolo d'incidenza eccede 40°. 29', il di cui ſeno è $\frac{50}{77}$ del raggio; il ſeno d'incidenza ſta al ſeno di refrazione de' raggi violetti come 50: 78; que' raggi adunque ſaranno riflettuti, ſe l'angolo d'incidenza eccederà 39°. 52', il di cui ſeno è $\frac{50}{78}$ del raggio.

ESP. XXXIX.

I raggi omogenei venendo raccolti in un fuoco ſopra un fondo di carta bianca, ſono ſenza colori.

ESP. XL.

Se uno de' raggi omogenei viene intercettato avanti di giugnere al fondo che li riceve, lo ſpettro compoſto de' raggi rimanenti diviene colorato.

Dalla precedente eſperienza appariſce, che la luce ſolare è una ſoſtanza eterogenea compoſta di ſette ſpecie di raggi omogenei. Si refranga un raggio di luce ſolare

passando dall' aria in un dato mezzo qualunque; i raggi omogenei investiranno la superficie rifrangente sotto un angolo comune d' incidenza, ma i seni degli angoli, ne' quali i raggi sono refratti, saranno differenti; l' angolo contenuto fra i raggi rosso e violetto dopo la refrazione si chiama *angolo di dissipazione*; ed è la differenza degli ultimi angoli, ne' quali que' raggi sono refratti.

Sia il seno d' incidenza al seno di refrazione de' raggi di mezzana refrangibilità passando dall' aria in un dato mezzo qualunque come $m : 1$, dei raggi violetti come $m + \dot{m} : 1$, e dei raggi rossi come $m - \dot{m} : 1$.

La quantità $\dot{m}$ essendo costante nello stesso mezzo, viene perciò assunta come una misura della potenza dispersiva o dissipativa. Così il seno d' incidenza al seno di refrazione ne' raggi di mezzana refrangibilità passando dall' aria nel vetro comune, sta come $\frac{77,5}{50} : 1$, ne' raggi rossi come $\frac{77}{50} : 1$, e ne' violetti come $\frac{78}{50} : 1$; perlocchè poste $\frac{77,5}{50} = m$, noi abbiamo $\frac{78}{50} = m + \dot{m}$, ed $\dot{m} = \frac{1}{100}$. Nella stessa maniera, se il seno d' incidenza sta al seno di refrazione ne' raggi di mezzana refrangibilità, che passano dall' aria nell' acqua come $\frac{108,5}{81} : 1$, ne' raggi rossi come $\frac{108}{81} : 1$, e ne' violetti come $\frac{109}{81} : 1$, e si fa $w = \frac{108,5}{81}$, noi avremo $\dot{w} = \frac{1}{162}$, ed $\dot{m} : \dot{w}$, ovvero la ragione delle

potenze disperſive de' due mezzi, onde reſtano ſeparati i raggi omogenei, ſarà come $\frac{1}{100} : \frac{1}{162}$, ovvero come 81 : 50.

Suppoſto, che il ſeno d'incidenza ſtia al ſeno di refrazione de' raggi roſſi, che paſſano dall' aria nel flint, come 1, 565 : 1, de' violetti come 1, 595 : 1, allora la ragione della refrazione ne' raggi di mezzana refrangibilità è come 1, 58 : 1, e ſe $n = 1,58$, naſce $\dot{n} = \frac{3}{200}$, e la ragione delle potenze disperſive del flint, e del vetro comune ſarà come $\frac{3}{200} : \frac{1}{150}$ ovvero come 3 : 2.

ESP. XLI.

Un raggio di luce ſolare venendo refratto ne' lati di un priſma iſoſcele di vetro comune, il cui angolo rifrangente è di 30°, quando i raggi di mezzana refrangibilità paſſano paralleli alla baſe, l' angolo di diſſipazione ſarà in circa di 39'.

Se un raggio di luce ſolare è refratto da una ſola superficie, ſia $t =$ alla tangente di refrazione de' raggi di mezzana refrangibilità, m: 1 la ragione della refrazione degli ſteſſi raggi, $\dot{m}$ la miſura della potenza disperſiva;

l' angolo di diſſipazione ſarà ſotteſo da un arco $= \frac{2\dot{m}t}{m}$, eſſendo 1 il ſeno tutto.

Così ſe un raggio ſolare cade ſopra una ſuperficie di vetro comune ad un angolo d' incidenza $= 20^\circ$, m eſſendo $= \frac{77,5}{50}$, ovvero 1, 55, l' angolo di refrazione de' raggi di mezzana refrangibilità ſarà $= 12^\circ.\ 44'.\ 52''$, e l' arco, che miſura l' angolo di diſſipazione,

$$= \frac{2 \times \text{tang. } 12^\circ.\ 44'.\ 52''}{100 \times 1,55} = 10'.\ 3'',$$ eſſendo il ſeno tutto $= 1$.

Se i raggi ſono refratti da due ſuperficie inclinate l'una all' altra come i lati di un priſma, ſia il ſeno dell' angolo rifrangente $= a$, il coſeno dell' angolo di refrazione de' raggi di mezzana refrangibilità alla prima ſuperficie ſia $= p$, il coſeno di refrazione alla ſeconda ſuperficie $= q$; onde l' angolo di diſſipazione, ſotto il quale i raggi roſſo e violetto ſono inclinati l' uno all' altro dopo la ſeconda refrazione, è $= \frac{2\dot{m}a}{pq}$. Così nell' eſperienza $\dot{m} = \frac{1}{100}$, $a =$ al ſeno di 30°, $p =$ al coſeno di 150, $q =$ al coſeno di $23^\circ.\ 39'.\ 5''$, e l' arco, che miſura l' angolo di diſperſione (eſſendo il raggio 1) $= \frac{2 \text{ ſin. } 30^\circ}{100 \times \text{cos. } 15^\circ \times \text{cos. } 23^\circ.\ 39'.\ 5''}$ $= 38'.\ 51''$.

Se un raggio viene refratto da ſuperficie parallele, l' an-

golo di diſſipazione ſvaniſce, perchè *a* oſſia il ſeno dell' angolo rifrangente in quel caſo è nulla.

ESP. XLII.

Il vertice di un priſma di flint, il cui angolo rifrangente = 23.° 40′, ſi applichi alla baſe di un priſma di vetro comune, il di cui angolo rifrangente = 25°; un raggio di luce ſolare paſſerà direttamente attraverſo i priſmi quando le loro ſuperficie ſono contigue, ma il raggio emergente ſarà colorato.

Si era per l'addietro creduto, che un raggio di luce ſolare emergerebbe in tutti i caſi ſenza colori dopo la refrazione, qualora non deviaſſe dal cammino del raggio incidente; da queſta eſperienza però ſi ſcorge il contrario.

Si ſuppone, che il raggio cada perpendicolarmente ſulla ſuperficie del priſma, il di cui angolo rifrangente è il più grande.

La poſizione de' priſmi nell' Eſperienza è tale, che gli effetti della refrazione ſul paralleliſmo de' raggi omogenei, che paſſan per quelli, ſono contrarj fra loro, e conſeguentemente ſe foſſero anche uguali, i raggi emergerebbero paralleli; ma il priſma di flint per la ſua potenza diſper-

ſiva maggiore fa più che contrapporſi alla ſeparazione de' raggi prodotta nel loro paſſaggio pel primo priſma, la quale = 38′ $\frac{1}{2}$, ed invertendo l' ordine de' colori, fa emergere i raggi roſſo, e violetto inclinati l' uno all' altro ſotto un angolo di 12′ $\frac{1}{4}$, che è baſtantemente grande per produrre una ſenſibil tinta de' colori priſmatici ne' raggi emergenti.

La difficoltà, che principalmente impediva la perfezione de' teleſcopj, conſiſteva nel rifrangere un raggio talmente, che deviando eſſo conſiderabilmente dal ſuo corſo primitivo la diſperſione de' raggi omogenei veniſſe impedita, e che con tal mezzo emergeſſero tutti paralleli, e naturalmente privi di colori, coſa da non poterſi altrimenti effettuare ſe non colla combinazione di ſoſtanze traſparenti dotate di potenze refrattiva, e diſperſiva tra ſe differenti.

ESP. XLIII.

Reſtando tutto come nell' Eſperimento precedente, ſi applichi alla baſe del priſma di flint il vertice di un priſma di vetro comune, il di cui angolo rifrangente è 10°; ſe un raggio di luce ſolare paſſa attraverſo i tre priſmi quando le loro ſuperficie ſono contigue, il raggio emergente devierà circa 5.° 37′ dal cammino del raggio incidente, ma ſarà ſenza colori.

In questo caso i due prismi di vetro comune refrangendo il raggio nella stessa direzione lo fanno deviare dal cammino del raggio incidente circa 5°. 37′ di più che non porta la deviazione in direzione contraria prodotta dalla refrazione nel prisma di flint; ma l'ultimo per la sua maggior potenza dispersiva esattamente distrugge la separazione de' raggi prodotta dalla refrazione per gli altri due prismi, cosicchè i raggi omogenei emergeranno alla fine paralleli, e naturalmente senza colori.

In questa Esperienza i raggi di mezzana refrangibilità emergono sotto un angolo di refrazione = 16°. 57′. Se un raggio solare cadesse sulla superficie del prisma, ultimamente applicato, sotto un angolo d'incidenza = 16°. 57′, l'angolo di dissipazione dopo l'emergenza nell'aria sarebbe 12′ $\frac{1}{4}$. Si è veduto dall'ultimo Esperimento, che la dissipazione de' raggi emergenti dai due prismi = 12′ $\frac{1}{4}$; per la qual cosa, e per la contraria posizione dei prismi i raggi rosso, e violetto emergendo inclinati tra se sotto un angolo di 12′ $\frac{1}{4}$ dai due prismi, e cadendo sulla superficie del terzo saranno refratti da questo senza colori.

ESP. XLIV.

Se un raggio di luce solare passa direttamente per due prismi qualunque, dotati di potenze dispersive ineguali, verrà separato ne' raggi omogenei.

Sebbene le deviazioni del raggio dopo la refrazione in ciascun prisma sieno eguali e contrarie, tuttavolta uno de' prismi possedendo una maggior potenza dell' altro di dispergere il raggio, i raggi omogenei emergeranno tra se inclinati, e in conseguenza il raggio emergente diverrà colorato.

L'apertura di una lente è terminata dalla circonferenza di un cerchio, il di cui centro coincide coll' asse della lente; la circonferenza predetta si suppone sempre contigua alla lente, e conseguentemente il suo piano è perpendicolare all' asse. L' anello della lente, il quale è più lontano dall' asse che la circonferenza che termina l'apertura, si suppone coperto di una sostanza opaca. Se un punto, ovvero in pratica un picciol corpo luminoso situato nell' asse della lente si considera come un oggetto, l'immagine formata dai raggi, che passano dall' oggetto per la più picciola apertura che sia bastante alla visione, si nomina immagine principale.

Se tutta l'apertura si cuopre con una sostanza opaca a riserva di un anello adjacente alla sua circonferenza, l'immagine formata dai raggi che passano per quest' anello si chiama *inmagine estrema*.

ESP. XLV.

Se i raggi omogenei vengono da un oggetto collocato nell' asse di una lente di vetro doppia-

mente conveſſa, l' immagine eſtrema dell' oggetto ſarà più vicina alla lente che l' immagine principale.

Di qui ſi ſcorge, che i raggi, i quali divergono da un dato punto in un oggetto non vengono tutti raccolti in un punto nell' immagine corriſpondente, poichè molte immagini di tal punto reſtano diffuſe ſullo ſpazio contenuto fra le immagini principale, ed eſtrema. La diſtanza tra l' immagine principale, e l' eſtrema ſi denomina *ſpazio di diffuſione*.

Queſta aberrazione de' raggi dal fuoco geometrico dipendente dalla figura sferica delle ſuperficie rifrangenti è una delle cagioni dell' indiſtinta viſione ne' teloſcopj, ec.

ESP. XLVI.

L' immagine eſtrema di un oggetto formata da una lente doppiamente conveſſa è colorata e indiſtinta, ſe la proporzione del diametro dell' apertura alla lunghezza focale principale eccede un certo limite.

Il colore, e la confuſione, che qui ſi oſſerva nell' immagine oſcura naſce dalla diverſa refrangibilità de' raggi omogenei componenti la luce ſolare. La qual luce emer-

gendo dalla lente con un grado di obliquità troppo grande viene sensibilmente separata ne' raggi colorati; questi formano molte immagini dello stesso punto, le quali sono tutte a differenti distanze dalla lente. Questa aberrazione produce una confusione anche nell'immagine principale, ma in tutte le altre formate dai raggi, che passano più lontani dall'asse per la lente, la confusione è moltissimo accresciuta.

Le due specie di aberrazione dianzi indicate sono i principali ostacoli alla perfezione de' telescopj.

Il metodo usato per ovviare a queste difficoltà si vedrà nelle seguenti sperienze.

ESP. XLVII.

Un vetro obbiettivo può essere composto di tre lenti, delle quali due sono doppiamente convesse fatte di vetro comune, e ne inchiudono una di flint doppiamente concava, cosicchè le immagini estrema, e principale degli oggetti formate dall' obbiettivo a un dipresso coincideranno.

Il vetro concavo essendo dotato di una potenza refrattiva maggiore che gli altri due diminuirà l'angolo di deviazione de' raggi estremi più che di quelli, i quali sono più vicini all'asse; in conseguenza i raggi estremi refratti

interſecheranno l' aſſe più lungi dal centro della lente composta che ſe foſſero paſſati ſoltanto per una lente doppiamente conveſſa della ſteſſa principal lunghezza focale.

I ſemidiametri delle lenti mentovate poſſono talmente proporzionarſi, che lo ſpazio di diffuſione ſvaniſca.

ESP. XLVIII.

Eſſendo date le potenze refrattiva, e diſperſiva delle tre lenti, che coſtituiſcono un obbiettivo compoſto, i ſemidiametri delle ſuperficie, poſſono talmente proporzionarſi fra loro, che le immagini eſtrema, principale, e le intermedie degli oggetti formate dall' obbiettivo rieſcano diſtinte e ſenza colori.

Dalle precedenti ſperienze ſi ſcorge, che la medeſima combinazione di lenti non ſolo riduce lo ſpazio di diffuſione ad una quantità inſenſibile, ma nel tempo ſteſſo rifrange i raggi eſtremi al fuoco geometrico ſenza ſepararli ne' colori primarj, perlocchè l' aberrazione prodotta dalla diverſa refrangibilità de' raggi non meno che dalla figura sferica della lente è quaſi interamente tolta. Le lenti coſtruite ſu queſti principj ſi ſono chiamate perfette.

E' inſorta una difficoltà nella coſtruzione delle lenti perfette, cioè di determinare in diverſe ſoſtanze rifran-

genti la potenza di dispergere i raggi omogenei, la quale non osserva alcuna legge della potenza refrattiva, della densità, o di altre qualisivogliano quantità formate dalle prime.

ESP. XLIX.

Un prisma di vetro comune, il di cui angolo rifrangente $= 30^\circ$, si applichi a contatto di un prisma di flint, il di cui angolo rifrangente $= 19^\circ$; i vertici de' prismi si collochino in direzioni opposte; un raggio solare venendo in essi refratto devierà dal cammino del raggio incidente, ma non si separerà nei raggi colorati.

In questo esperimento l'angolo d'incidenza sulla prima superficie del prisma di vetro comune essendo $= 0$, l'angolo di refrazione, sotto cui il raggio emerge dal prisma di flint è $= 16^\circ\ 31' \frac{3}{4}$, e l'angolo contenuto fra i raggi incidente ed emergente $= 5^\circ\ 31' \frac{3}{4}$.

Se un raggio solare è refratto soltanto da un prisma di vetro comune, l'angolo d'incidenza essendo $= 0$, l'angolo di refrazione, sotto cui emergono i raggi mezzani, sarà $= 50^\circ\ 48'.\ 18''$; laonde l'angolo di dissipazione sarà misurato da un arco (posto il raggio 1) $= \frac{2 \times sin.\ 30^\circ}{100 \times cos.\ 50^\circ\ 48'.\ 18''} = 54'.\ 24''$, per la regola nella nota all'Esperimento XLI.

In ſimil maniera ſe un raggio ſolare inveſte un priſma di flint ſotto un angolo d'incidenza $= 16^\circ\ 31' \frac{3}{4}$, emergerà ſotto un angolo di refrazione $= 50^\circ\ 48'.\ 18''$, e di qui s' inferiſce, che l' angolo di diſſipazione dopo l' emergenza ſarà miſurato da un arco (aſſunto il raggio 1) $=$

$$\frac{3 \times \mathit{ſin.}\ 19^\circ}{100 \times \cos.\ 50^\circ\ 48'.\ 18'' \times \cos.\ 10^\circ\ 22'.\ 26''} = 54'.$$

Gli angoli di diſſipazione dianzi determinati differiſcono ſolamente di 24'', il che eſſendo inſenſibile negli eſperimenti, gli angoli ſono fiſicamente parlando eguali.

Così egli è chiaro, che i due priſmi operano egualmente ſul paralleliſmo de' raggi omogenei che paſſano attraverſo di eſſi nelle direzioni ſopra indicate, e queſti effetti per la poſizione de' priſmi tendendo a correggerſi ſcambievolmente, i raggi omogenei emergeranno dopo la refrazione paralleli e ſenza colori.

Quanto al determinare le potenze di diſſipazione, e di refrazione nelle diverſe ſoſtanze rifrangenti, il metodo ſeguente ſembra adattato al pari di qualſiſia altro:

Si ſupponga, che un raggio ſolare paſſi per un priſma (di cui ſi cercano le potenze refrattiva, e diſſipativa) cadendo perpendicolarmente ſopra la prima ſuperficie. Si miſurino accuratamente l' angolo di diſſipazione, e l' angolo di refrazione de' raggi mezzani, e ſia a = alla miſura dell' angolo di diſſipazione, t = alla tangente della refrazione (poſto il ſeno tutto 1).

L'angolo d'incidenza ſopra la ſeconda ſuperficie eſſendo il complemento dell' angolo rifrangente del priſma a 90°, e l'angolo di refrazione eſſendo determinato come ſopra, noi ottenghiamo la ragione della refrazione: ſe queſta è come $n : 1$, allora la miſura della potenza diſſipativa

$$\dot{n} = \frac{an}{2t}.$$

E' da oſſervarſi, che le regole precedenti intorno all' angolo di diſſipazione ſono matematicamente vere unicamente quando $\frac{\dot{n}}{n}$ è minore di ogni aſſegnabile quantità; ma nell'applicazione pratica delle medeſime a quelle ſoſtanze rifrangenti, che ſono ordinariamente uſate nell' ottica (ſpecialmente quando gli angoli di refrazione ſono piccioli) quelle regole non differiranno dalla verità per più di pochi ſecondi di un grado, del quale picciolo errore ſono inſenſibili gli effetti nell' eſperienza.

E S P. L.

Le ſoſtanze colorate riflettono i raggi omogenei di luce, che ſono dello ſteſſo loro colore, più copioſamente che gli altri raggi.

Una ſoſtanza roſſa tenuta ne' raggi verdi, ſe ogni altra luce venga perfettamente eſcluſa, appariſce verde,

ſebbene molto languidamente: tenuta ne' raggi roſſi compariſce di un roſſo viviſſimo, il che dà a divedere, che la ſoſtanza è di tal natura da riflettere ai raggi roſſi molto più copioſamente de' verdi.

ESP. LI.

Si divida un circolo in ſette ſettori proporzionali agli ſpazj occupati dai colori nello ſpettro priſmatico, e queſti ſettori ſi tingano coi colori primarj ſecondo il loro proprio ordine e proporzione; ſe il circolo ſi rivolgerà velocemente nel ſuo piano intorno al centro, il tutto ſi vedrà preſſochè bianco.

I colori artificiali eſſendo meno puri de' naturali, la miſtura de' ſette colori nell' eſperienza non produrrà una perfetta bianchezza, ma vi ſi accoſterà tanto più da preſſo quanto più eſattamente ſi dividerà il circolo nelle vere proporzioni, e quanto più i colori adoperati per la tinta ſi accoſteranno a quelli, che compongono un raggio di luce.

ESP. LII.

Il calore prodotto con raccogliere i raggi del ſole nel fuoco principale di uno ſpecchio conca-

vo, o di una lente doppiamente convessa si osserva essere tanto più intenso, quanto maggiore è l' area dello specchio o della lente, e quanto minore quella del fuoco, in cui i raggi vengono raccolti.

L' intensità del calore prodotto dagli specchi o lenti incendiarie è proporzionale ai quadrati de' loro diametri direttamente, e ai quadrati delle loro lunghezze focali principali inversamente.

Quindi l' intensità de' raggi solari raccolti nel fuoco principale di uno specchio concavo sarà la medesima che nel fuoco principale di una lente doppiamente convessa della stessa area, la di cui lunghezza focale principale è una metà del semidiametro del riflettente, ossia dello specchio.

ESP. LIII.

I raggi del sole comunque condensati non comunicano calore alcuno ad un mezzo uniforme, attraverso cui passano.

EPS. LIV.

Se un raggio di luce cade sopra una sfera di vetro, ed emerge dopo una riflessione, e due

refrazioni; i colori prismatici saranno visibilissimi in que' raggi emergenti, che sono inclinati ai raggi incidenti sotto un angolo di 17°. 50'.

I raggi violetti compariranno in grandissima copia sotto l'angolo mentovato nell'esperienza, ma i raggi rossi compariranno quando i raggi incidente ed emergente sono inclinati sotto un'angolo di circa 19°. 25': dal che ne segue, che la larghezza d'un' iride formata da una riflessione e da due refrazioni attraverso della sfera di vetro si troverebbe coll'osservazione = 1°. 35' + 32' = 2°. 7'.

Può essere utile il soggiugnere alcune poche note intorno all'iride.

1. La prima iride è quella, che si vede più comunemente in cielo, ed è formata da una riflessione, e due refrazioni de' raggi del sole cadenti sopra le goccie di pioggia; l'iride secondaria è formata dai raggi cadenti sopra le goccie di pioggia, ed emergenti dopo due refrazioni, e due riflessioni. Queste iridi non si vedono mai se non quando piove, e il sole nel medesimo tempo risplende, essendo le goccie di pioggia ed il sole per riguardo all' orizzonte dello spettatore in parti del cielo opposte.

2. Il semidiametro apparente dell'iride è uguale all'altezza apparente del punto più elevato dell'arco insieme coll' altezza del centro del sole sopra l'orizzonte.

3. Il semidiametro apparente dell' iride primaria è la

differenza tra quattro volte l' angolo di refrazione e due volte l' angolo d' incidenza di que' raggi contigui che cadono ſulle goccie di pioggia, ed emergono paralleli dopo due refrazioni ed una rifleſſione; queſt' angolo appartenendo ai raggi roſſi è circa $42^{o}.\ 2'$; quindi neſſuna iride primaria può oſſervarſi ſe l' altezza del centro del ſole ſopra l'orizzonte non è minore di $42^{o}.\ 2'$. In grazia della brevità i raggi ſi conſiderano qui come vegnenti dal centro del ſole unicamente.

4. I raggi contigui, che cadono ſopra un globo rifrangente, emergono paralleli dopo due refrazioni ed una rifleſſione, quando il minimo incremento dell' angolo d' incidenza ſta all' incremento contemporaneo dell'angolo di refrazione come 2 : 1.

5. Perciò la tangente d' incidenza ſta alla tangente di refrazione come 2 : 1.

6. Ritrovare que' due angoli, i di cui ſeni ſono nella proporzione di 4 : 3, e le tangenti in quella di 2 : 1.

Sieno x, ed y i coſeni d' incidenza, e di refrazione riſpettivamente, e però i quadrati de' loro ſeni ſaranno $1-x^2$, ed $1-y^2$ eſſendo, il raggio 1, ed i quadrati delle loro tangenti ſaranno $\frac{1-x^2}{x^2}$ ed $\frac{1-y^2}{y^2}$, d' onde abbiamo per le condizioni del problema

$$1-x^2 : 1-y^2 :: 16 : 9$$

$$\frac{1-y^2}{y^2} : \frac{1-x^2}{x^2} :: 1 : 4,$$

e componendo queste raggioni ricaviamo

$$x^2 : y^2 :: 4 : 9,$$

ed $x^2 = \frac{4y^2}{9}$; perlocchè $1 - x^2 = \frac{9-4y^2}{9}$;

quindi per la prima proporzione $\frac{9-4y^2}{9} : 1-y^2 :: 16 : 9$;

e moltiplicando gli estremi e i medii $9-4y^2 = 16-16y^2$,

onde $y^2 = \frac{7}{12}$, ed $y = \sqrt{\frac{7}{12}}$ = al coseno dell' angolo

di refrazione; da ciò noi determiniamo l' angolo di refrazione $= 40^\circ. 12'. 11''$, e l' angolo d' incidenza (essendo quello, il di cui seno sta al seno di $40^\circ. 12'\ 11''$ come $4:3$) $= 59^\circ.\ 23'. 28''$, il che ci dà la metà dell' angolo contenuto fra i raggi incidente ed emergente, ovvero la metà del semidiametro dell' arco $= 2 \times 40^\circ. 12'. 11'' - 59^\circ. 23'. 28''$ $= 21^\circ. 0'. 54''$: conseguentemente l' angolo fra i raggi incidente ed emergente, ovvero l' apparente semidiametro dell' arco formato dai raggi rossi $= 42^\circ. 1'. 48''$, ovvero circa $42^\circ. 2'$.

Nella stessa maniera il semidiametro apparente dell' iride formata da' raggi violetti si ritrova in circa $40^\circ. 17'$, che essendo sottratto da $42^\circ. 2'$, lascia $1^\circ. 45'$ per la larghezza apparente dell' arco. Questa sarebbe la larghezza se i raggi solari emanassero dal centro del sole unicamente; ma poichè il diametro apparente del sole è circa $32'$, l ap-

parente larghezza dell' arco crescerà di 32′, cosicchè esso comparirà osservandolo $= 2^{\circ}.\ 17'$

Le regole seguenti si estenderanno a determinare gli angoli d' incidenza e di refrazione de' raggi contigui omogenei, che emergono paralleli dalle sfere refrangenti di ogni sorta, essendo generalmente il numero delle riflessioni al di dentro delle sfere $= n$.

1. I raggi contigui emergeranno paralleli dopo n riflessioni, e due refrazioni, quando la minima variazione dell' angolo d'incidenza sta alla variazione contemporanea dell' angolo di refrazione come $n + 1 : 1$.

2. Suppongasi $n + 1 : 1$, come $1 : t$; quindi la tangente d'incidenza dee stare alla tangente di refrazione come $1 : t$. Sia il seno d' incidenza al seno di refrazione come $1 : s$, onde per ritrovare gli angoli d' incidenza e di refrazione si dicano i loro coseni x, ed y, e noi abbiamo dalle condizioni del problema.

$1 - x^2 : 1 - y^2 :: 1 : s^2$, posto il seno tutto $= 1$, ed $\frac{1 - y^2}{y^2} : \frac{1 - x^2}{x^2} :: t^2 : 1$, e componendo queste ragioni $x^2 : y^2 :: t^2 : s^2$,

ed $x^2 = \frac{t^2 y^2}{s^2}$, ed $1 - x^2 = \frac{s^2 - t^2 y^2}{s^2}$; sostituendo questo valore di $1 - x^2$ nella prima proporzione noi abbiamo $\frac{s^2 - t^2 y^2}{s^2} : 1 - y^2 :: 1 : s^2$, d'onde $1 - s^2 = y^2 - y^2 t^2$,

ed $y^2 = \frac{1-s^2}{1-t^2}$, ed $y = \sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}}$ = al coſeno della refrazione in generale. Il ſeno della refrazione $= \sqrt{\frac{s^2-t^2}{1-t^2}}$.

e conſeguentemente il ſeno d'incidenza $= \frac{1}{s}\sqrt{\frac{s^2-t^2}{1-t^2}}$.

L'angolo d'incidenza eſſendo determinato $= I$, e l'angolo di refrazione $= R$; ſia $p = 90^o$, m = al numero delle rifleſſioni $+ 1$; allora la metà dell'angolo contenuto fra i raggi incidenti, e quelli che emergono contigui e paralleli ſarà $= (3-m)\,p + m\,R - I$.

DUE FORMOLE

Per la coſtruzione delle lenti obbiettive perfette.

Ved. Euler. Dioptr. pag. 335. Vol. I.

Queſti vetri obbiettivi ſono compoſti di tre lenti contigue aventi un aſſe comune.

Le due lenti eſteriori ſono doppiamente conveſſe, fatte di *crown*, includenti una doppiamente concava di *flint*.

La ragione della refrazione ne' raggj di mezzana refrangibilità, che paſſano dall' aria nel vetro *crown*, è quella di . . . . . . 1, 53 : 1
dall' aria nel flint, come . . . . . 1, 58 : 1

Le forze diſperſive del *flint*, e del *crown* ſono come 3 : 2

La lunghezza focale principale delle lenti perfette $= P$.

PRIMA FORMOLA.

I raggj della ſuperficie ſono come ſegue

Raggi della	1.ª ſuperficie =	$0,5004 \times P$	crown
	2.ª ſuperficie =	$3,6665 \times P$	
Raggi della	1.ª ſuperficie =	$-0,5167 \times P$	flint
	2.ª ſuperficie =	$-0,4843 \times P$	
Raggi della	1.ª ſuperficie =	$0,5219 \times P$	crown
	2.ª ſuperficie =	$0,4757 \times P$	

Semiapertura $= 0,1189 \times P$

SECONDA FORMOLA.

Raggi della	1.ª superficie =	0, 2829 × P	crown
	2.ª superficie =	2, 0729 × P	
Raggi della	1.ª superficie =	− 2, 1459 × P	flint
	2.ª superficie =	− 0, 2955 × P	
Raggi della	1.ª superficie =	0, 5938 × P	crown
	2.ª superficie =	2, 5006 × P	

Semiapertura = 0, 0707 × *P*.

N. B. La prima superficie si suppone quella, che è più vicina all' oggetto.

SEZIONE VI.

ASTRONOMIA.

CAPO I.

1. L' Astronomia è un ramo di natural cognizione, che si riferisce alle apparenze celesti, e alle loro cagioni.

2. L' *Astronomia semplice* è quella parte di questa scienza, la quale descrive unicamente i fenomeni e le loro immediate cagioni: l' *Astronomia Fisica* dimostra le prime conosciute cagioni de' fenomeni.

3. Uno spettatore guardando il cielo si considera collocato nel centro di una sfera, sulla di cui concava superficie sono disposti tutti i corpi celesti.

Su questa concava superficie si suppongono descritte diverse figure, che servono solo come mezzi di riferire

l'oggetto con maggiore facilità a qualche ſtella conoſciuta: queſte figure ſi chiamano coſtellazioni. Egli è chiaro non eſſere d'alcuna conſeguenza per ciò che riguarda i luoghi apparenti delle ſtelle di qual grandezza ſia queſta sfera immaginaria, ſupponendo ſempre, che il ſuo centro coincida col centro della viſta; così in un globo celeſte artificiale la poſizione angolare delle ſtelle è tale, che ſe foſſe guardata dal centro della sfera ſarebbe ſimile a quella che ſi oſſerva nel cielo.

L'ordine vuole, che ora ſi eſpongano alcune proprietà della sfera immediatamente relative all'Aſtronomia..

4. Un circolo, che ſi rivolge intorno ad un diametro come ad un aſſe di moto, genera una figura ſolida, che ſi nomina *sfera*.

5. Il centro del circolo generatore è il centro della sfera, ed ogni linea retta, che paſſa pel centro, ed è terminata dalla ſuperficie della sfera, ſi dice diametro.

6. Ogni cerchio, il di cui piano paſſa pel centro della sfera, la divide in due parti eguali, e ſi chiama *cerchio maſſimo*, venendo con ciò diſtinto da altri cerchi, i di cui piani non paſſando pel centro, dividono la sfera diſugualmente, e ſono denominati *cerchi minori*.

La diſtanza angolare di due punti ſituati nella ſuperficie della sfera ſi miſura dall'arco di un circolo maſſimo fra eſſi intercetto.

7. Una linea tirata dall' interſezione di due qualunque linee in un piano, e perpendicolare ad eſſe, è perpendicolare al piano ſteſſo.

Quindi ſe due linee in un piano inclinate l'una all' altra ſono parallele ad un piano dato, i due piani ſaranno paralleli.

Così ſe due linee inclinate l'una all' altra in un piano ſono orizzontali, il piano ſarà parallelo all'orizzonte.

8. Un diametro di una sfera guidato perpendicolare al piano di un circolo maſſimo, ſi chiama *aſſe*, e le eſtremità dell' aſſe ſi dicono *poli* del circolo maſſimo.

1. Ogni punto nella circonferenza di un circolo maſſimo è diſtante 90°. dai poli.

2. Due qualunque circoli maſſimi di una sfera ſi dividono ugualmente, perchè l'interſezione de' loro piani è un diametro comune ad entrambi, ed ogni circolo è ugualmente diviſo dal ſuo diametro.

9. I circoli maſſimi, che paſſano per li poli

di un circolo maſſimo, ſi nominano *ſecondarj* di queſt' ultimo.

Ogni ſecondario divide per metà il ſuo circolo maſſimo, e tutti i circoli minori a queſto paralleli.

10. L' inclinazione di due piani è la medeſima che l' inclinazione di due linee condotte dallo ſteſſo punto nella comune interſezione de' piani, e perpendicolari all' interſezione.

11. L' inclinazione de' piani di due circoli maſſimi viene miſurata dall' arco di un ſecondario comune ad ambedue, ed intercetto tra i piani.

12. I piani de' circoli ſecondarj ſono perpendicolari ai piani de' loro circoli maſſimi, perchè l' inclinazione di un ſecondario al ſuo circolo maſſimo ha per miſura un quadrante.

13. L' inclinazione delle circonferenze di due circoli maſſimi ſi appella *angolo sferico*, ed è la ſteſſa che l' inclinazione de' piani dei circoli.

La miſura d' un angolo sferico è adunque un arco di un ſecondario comune ad ambedue i circoli maſſimi, ed intercetto da eſſi.

14. Tre archi di un circolo maſſimo, neſſuno de' quali è maggiore di 180°, compongono un triangolo sferico, nel quale ſonovi ſei quantità, cioè tre lati, e tre angoli, delle quali quantità eſſendo date tre qualunque, ſi può determinare il reſtante per le regole della Trigonometria.

Siccome la poſizione angolare degli oggetti veduti da un dato punto, e ſituati nello ſteſſo piano ſi miſura ſulla circonferenza di un cerchio di qualunque raggio indeterminato, il di cui centro coincide col centro della viſta, in ſimil maniera la poſizione angolare degli oggetti ſituati in piani diverſi viene determinata riferendoli alla ſuperficie di una sfera, il di cui centro coincide col centro della viſta.

Si eſaminerà in appreſſo in qual maniera le proprietà della sfera ſopra mentovate ſi applichino alla determinazione della poſizione, e del *moto* angolare de' corpi celeſti.

CAPO II.

DEL LUOGO E MOTO APPARENTE DE' CORPI CELESTI.

1. Tutte le ſtelle, a ciò che appariſce, ſi rivolgono giornalmente nel cielo deſcrivendo circoli, i di cui piani ſono tra ſe paralleli.

2. Tra i circoli deſcritti dai corpi celeſtì nella loro rivoluzione diurna, ve ne ha uno ſolo, il di cui piano paſſa pel centro della viſta dello ſpettatore. Queſto circolo è nominato *equatore*.

L'occhio dello ſpettatore ſi ſuppone coincidere col centro della sfera, ſulla di cui ſuperficie concava ſono diſpoſti tutti i corpi celeſti: l'equatore adunque debb'eſſere un circolo maſſimo del cielo.

Tutti gli altri circoli deſcritti dalle ſtelle ſituate fuori dell'equatore ſono circoli minori della sfera paralleli all'equatore, e ſi chiamano *paralleli di declinazione*.

3. Se reſtando fiſſa un' eſtremità di una linea retta l' altra eſtremità ſi dirige ſempre ad una ſtella, la quale ſi rivolge in un circolo minore, la linea deſcrive col ſuo moto la ſuperficie di un cono, il di cui vertice coincide coll' eſtremità fiſſa della linea predetta, e la circonferenza della baſe col circolo minore deſcritto dalla ſtella parallelo all' equatore.

4. Due punti preſi 90.° lungi dall' equatore, ſi dicono *poli dell' equatore*, ovvero *poli del mondo*.

5. I circoli ſecondarj all' equatore ſi chiamano circoli di declinazione, 24. di queſti che dividono l' equatore in parti uguali ſi nominano *circoli orarj*.

6. La declinazione di una ſtella è la ſua diſtanza angolare dall' equatore miſurata ſopra un circolo di declinazione, che paſſa per la ſtella.

Così nel principio d' eſtate la declinazione del ſole è 23.° 28′ al nord; quando il ſole è nell' equatore la ſua declinazione è o.

7. Si veggono muovere colla minore velocità quelle ſtelle, che ſono le più lontane dall' e-

quatore, dove la velocità del loro moto apparente è la più grande.

La velocità apparente di una ſtella nella ſua circolazione diurna è come il coſeno di declinazione.

8. Il ſole, ed alcune ſtelle particolari da mentovarſi in appreſſo ſi veggono cangiare i loro luoghi fralle ſtelle fiſſe, e compire i loro giri in varj tempi periodici.

Le ſtelle fiſſe conſervano ſempre le ſteſſe diſtanze angolari tra loro, per cui ſi diſtinguono dal ſole, e dai pianeti, che mutano continuamente i loro luoghi sì per riguardo a ſe, come alle ſtelle fiſſe.

I moti proprj, che ſi ſono ſcoperti nelle ſtelle Arturo, Capella, ed alcune altre, qui non ſi conſiderano.

9. Il ſole compie il ſuo giro fra le ſtelle fiſſe in 365. giorni, 6 ore, e circa 9 minuti, deſcrivendo un circolo maſſimo nel cielo, chiamato *eclittica*.

10. L' eclittica oſſervaſi inclinata all' equatore ſotto un angolo di circa 23.° 28'.

L' eclittica e l' equatore eſſendo circoli maſſimi ſi tagliano per metà; il perchè i punti d' interſezione

debbono eſſere diſtanti 180°; queſti ſono chiamati *punti equinoziali* per ragioni da dirſi in appreſſo.

11. L' eclittica ſi divide in dodici parti chiamate *ſegni*, contenendo ciaſcuna 30. gradi; il primo punto di Ariete coincide con uno de' punti equinoziali, e il primo di Libra coll' altro.

I dodici ſegni ſono i ſeguenti: Ariete, Toro, Gemini,
♈ ♉ ♊
Cancro, Leone, Vergine, Libra, Scorpione, Sagittario,
♋ ♌ ♍ ♎ ♏ ♐
Capricorno, Aquario, Peſci.
♑ ♒ ♓

Il moto apparente de' corpi nella medeſima direzione, in cui ſi vede muoverſi il ſole fralle ſtelle fiſſe, ſi chiama *motus in conſequentia*, ed il moto nella direzione contraria *motus in antecedentia*.

12. L' *aſcenſione retta* di una ſtella ſi miſura da un arco dell' equatore, intercetto tra il primo punto di Ariete, ed un circolo di declinazione che paſſa per la ſtella, contando ſecondo l' ordine de' ſegni.

Così nel principio d' eſtate l' aſcenſione retta è di 90. gradi,

13. La *longitudine* di una ſtella viene miſurata da un arco dell' eclittica intercetto fra il primo punto di Ariete, ed un circolo ſecondario all' eclittica, il quale paſſa per la ſtella, contando ſecondo l' ordine de' ſegni.

Così nel principio d'eſtate la longitudine del ſole è 90°, quando il ſole entra in libra, la longitudine è = 180°.

14. La latitudine di una ſtella è la ſua diſtanza angolare dall' eclittica miſurata ſopra un circolo ſecondario all' eclittica, il quale paſſa per la ſtella.

La latitudine del ſole è dunque nulla.

15. Un circolo ſecondario comune all' eclittica ed all' equatore, ſi chiama *coluro ſolſtiziale*: un ſecondario all' equatore, che paſſa per li punti equinoziali, ſi appella *coluro equinoziale*.

L' inclinazione dell' eclittica all' equatore ſi miſura conſeguentemente da un arco del coluro ſolſtiziale intercetto fra l' una e l' altro, e queſt' arco ſarà la miſura della maſſima declinazione del ſole = 23° 28′.

16. L' *Orizzonte* è un circolo maſſimo nel cielo, il di cui piano è perpendicolare ad un piombino liberamente ſoſpeſo ed in quiete.

Egli è evidente, che l'orizzonte, e tutti i cerchi da esso dipendenti sono mobili, ogni diverso spettatore avendo un orizzonte diverso.

Il polo dell'orizzonte sopra di noi si chiama *Zenit*, l'altro polo *Nadir*.

17. I secondarj all'orizzonte si chiamano *circoli verticali*.

L'altezza d'una stella si misura dall'arco di un circolo verticale, intercetto fra la stella e l'orizzonte; il complemento dell'altezza a 90° è la distanza della stella dal zenit.

18. Un secondario comune all'equatore e all'orizzonte si chiama *meridiano*; il meridiano adunque passa pel polo dell'equatore, e pel zenit.

Quindi il meridiano è un circolo verticale, e l'inclinazione dell'equatore all'orizzonte si misura da un arco del meridiano tra essi intercetto.

19. L'*azimut* di una stella viene misurato da un arco dell'orizzonte, intercetto fra il meridiano, ed un circolo verticale che passa per la stella.

20. Un circolo verticale, che taglia il meridiano ad angoli retti, si nomina *verticale primo*.

Le interſezioni del meridiano, e del primo verticale coll' orizzonte ſi dicono *punti cardinali*, ovvero *nord*, *eſt*, *oveſt*, e *ſud*; tutto l' orizzonte diviſo in 32. parti equali, forma la buſſola nautica.

21. Il moto diurno apparente delle ſtelle è dall' eſt all' oveſt.

Quando ſi dice, che una ſtella ſi muove apparentemente dall' eſt all' oveſt s' intende, che un circolo verticale ſempre paſſando per la ſtella cangia di continuo il ſuo azimut abbandonando le parti orientali, ed accoſtandoſi alle occidentali dell' orizzonte.

22. La direzione, nella quale ſi muove il ſole nell' eclittica fra le ſtelle fiſſe, è contraria a quella del ſuo moto diurno apparente. La direzione del moto de' pianeti tra le ſtelle fiſſe ſi ſcorge eſſere il più delle volte *in conſequentia*, ma alcune volte *in antecedentia*: i pianeti ſi veggono anco talvolta ſtazionarj.

23. Un arco del meridiano, intercetto tra il zenit e l' equatore ſi nomina la *latitudine* del luogo.

24. Un arco dell' equatore, intercetto fra i meridiani di due luoghi, ſi chiama la *differenza della loro longitudine*; ovvero, ſe la longitudine di

uno di essi si riferisce al meridiano dell' altro, l'arco mentovato si chiama *la longitudine*.

Così se la longitudine di Roma si riferisce al meridiano di Londra, essa è $9^{\circ}\ \frac{3}{4}$ all' est.

Quando il centro del sole è sopra il meridiano di un u ogo si dice essere ivi *mezzo giorno*, che in conseguenza in diversi luoghi sarà in tempi diversi, e perchè il tempo trascorso tra il lasciare e il raggiugnere lo stesso meridiano è 24. ore, nel qual tempo un circolo di declinazione che passa pel centro del sole descrive 360° computati sull' equatore, ne viene in conseguenza, che in un' ora esso descriverà 15°, in un minuto di tempo $15'$, ed in un secondo di tempo $15''$ di un grado, &c.

25. I *tropici* sono due paralleli di declinazione, la di cui distanza dall' equatore è uguale alla massima declinazione del sole.

La distanza de' tropici dall' equatore è in conseguenza $= 23^{\circ}.\ 28'$.

26. I circoli *artico*, ed *antartico* sono due paralleli di declinazione, la di cui distanza dai poli è uguale alla distanza de' tropici dall' equatore.

Il circolo artico è 23°. 28′ diſtante dal polo boreale; e l'antartico alla ſteſſa diſtanza dall' auſtrale.

27. Il tempo apparente del giorno ſi miſura dall' angolo contenuto fra il meridiano del luogo, ed un circolo di declinazione che paſſa pel centro del ſole, aſſegnando un ora per 15°; e proporzionalmente per li minuti, e ſecondi di un grado.

L'arco di un circolo maſſimo della sfera ſi determina (cioè ſi conoſce la ſua proporzione alla circonferenza) con miſurare l' angolo ſotteſo dalle ſue eſtremità al centro della sfera; laonde per applicare i principj precedenti all' Aſtronomia Pratica ſarà neceſſario di premettere alcune propoſizioni intorno alla miſura degli angoli.

CAPO III.

SOPRA LA MISURA DEGLI ANGOLI.

1. SE due oggetti apparifcono coincidenti colle eftremità di un arco circolare all' occhio di uno fpettatore fituato al centro del circolo, quell' arco mifurerà l' angolo fottefo dagli oggetti.

1. Rapprefenti a un arco qualunque, A^{o} l'angolo da effo fottefo, p un angolo retto, c la circonferenza, ed r il raggio del circolo; noi abbiamo la feguente proporzione;

$A^{o} : 4p :: a : c$, perciò $A^{o} = \frac{4pa}{c}$;

e perchè $4p$ è lo fteffo in tutti i circoli, A^{o} farà proporzionale ad $\frac{a}{c}$, ovvero $\frac{a}{r}$, cioè l' angolo farà come l' arco direttamente, ed il raggio del cerchio inverfamente.

2. In qualunque numero di parti eguali fi divida la circonferenza di un cerchio, un angolo retto verrà mifurato da $\frac{1}{4}$ di effe; perlocchè fe la circonferenza fi divide in 360. parti eguali, o gradi, un angolo retto farà fottefo da 90^{o}.

3. Gli archi, che misurano i piccioli angoli, sono presso a poco eguali ai loro seni, corde, o tangenti, essendo dato il raggio del cerchio: conseguentemente i piccioli angoli sono a un dipresso proporzionali ai loro seni, ec. nel medesimo circolo, ed in diversi circoli sono come i loro seni direttamente, ed i raggi de' cerchi inversamente.

4. I piccioli angoli sottesi da un dato oggetto rettilineo, che è perpendicolare all' asse della visione, sono più grandi nella medesima proporzione che le distanze dell' osservatore sono più piccole.

5. Sia $M^{\circ} = 57^{\circ}.\ 17'.\ 45''$, ovvero $206265''$ (che è l' angolo sotteso da un arco uguale al raggio). Dacchè si è veduto nella nota 1., che $A^{\circ} = \frac{4pa}{c}$, & per le proprietà del cerchio $\frac{4p}{c} = \frac{M^{\circ}}{r}$, ne segue, che $A^{\circ} = \frac{a}{r} M^{\circ}$. Quindi $a = \frac{A^{\circ}}{M^{\circ}} r$.

6. Se s è il seno, la corda, o la tangente d'un picciolo angolo, quest' ultimo sarà prossimamente $= \frac{s}{r} M^{\circ}$.

7. Se $A^{\circ} =$ un angolo di $1''$, poichè $M^{\circ} = 206265''$, ne siegue, che $\frac{A^{\circ}}{M^{\circ}} = \frac{1}{206265}$; ed un arco sottendente un angolo di $1'' = \frac{r}{206265}$ cioè $\frac{1}{206265}$ parte del rag-

gio; dunque un arco di $1' = \frac{60r}{206265} = \frac{1}{3437,8}$, ovvero incirca $\frac{1}{3438}$ parte del raggio.

Per le regole precedenti essendo note due qualunque di queste quantità, cioè un arco circolare, l'angolo da esso sotteso, e il raggio del cerchio, si può determinare l'altra.

Gli archi de' quadranti e settori che si usano per la misura degli angoli, sono divisi in gradi, ec., e negli stromenti di un raggio molto grande le divisioni si estendono per mezzo di un nonio qui sotto descritto ai secondi di un grado. Un indice di ugual curvatura dell'arco si applica all'estremità di un raggio mobile, pel di cui mezzo si determina l'angolo sotteso tra i due oggetti osservati.

Al raggio mobile anzidetto si applica un telescopio avente un punto fisso segnato nel centro del campo; una linea, che congiugne questo punto col centro del vetro obbiettivo, si dimanda *linea di collimazione*: questa linea determina la direzione nella quale si fa l'osservazione.

2. Un angolo osservato si allontanerà dal vero, se la linea di collimazione sarà inclinata al piano del quadrante, col quale si prende l'osservazione.

Suppoſto, che il quadrante ſia fiſſo in un dato piano, la linea di collimazione può conſiderarſi come il raggio d'una sfera, un circolo maſſimo della quale coincide coll' arco del quadrante.

Se la linea di collimazione ſi inclina al piano del quadrante, eſſa ſi dirige continuamente durante il moto dell' indice ad un circolo minore della sfera, e per conſeguenza non ſi può determinare la diſtanza angolare degli oggetti, la quale ſi miſura ſempre ſopra un circolo maſſimo.

Si ſuppone, che ciaſcuna parte dell' arco graduato, e l' indice ad eſſo contiguo ſtiano nel medeſimo piano, il quale ſi chiama piano del quadrante, ed è perpendicolare all' aſſe del moto, intorno cui il quadrante, o l' indice applicatovi ſi muove.

3. Il piano di un quadrante eſſendo verticale, ſe uno de' raggi contenenti l' angolo retto è orizzontale, l' altro ſarà perpendicolare all' orizzonte: un raggio intermedio eſſendo diretto ad una ſtella ec. divide il quadrante in due archi, uno de' quali miſura la diſtanza dal zenit, e l' altro l' altezza della ſtella ſopra l' orizzonte.

Sebbene il piano del quadrante ſia verticale, e coincida con quello, in cui ſi muove la linea di collimazione, tuttavia gli errori ſeguenti poſſono produrre una differenza tra le altezze vera ed oſſervata.

1. Se la linea di collimazione non è orizzontale allorchè l' indice ſegna o, ovvero 90^o.

2. Se le diviſioni del quadrante ſono ineſatte.

3. Se la diviſione ſegnata dall' indice ſi legge erroneamente.

La direzione di tutti queſti errori coincidendo col piano del quadrante, ſarà meſtieri conſiderarla inſieme.

La prima circoſtanza, che ſi preſenta, ſi è, che eſſi non conbinano neceſſariamente ad accreſcere, o ſminuire l' altezza oſſervata; ma può accadere, che i loro effetti eſſendo contrarj ſi correggano, oppure anche ſi diſtruggano fra loro.

Per formare un computo dell' errore, che probabilmente naſcerà per queſto capo, ſupponghiamo, che la diviſione del quadrante ſia matematicamente eſatta, e che la direzione della linea di collimazione al punto *o*, e la lettura della diviſione ſia ſicura ſino a d'', e non più rigoroſa mente. Vi è un eguale probabilità, che l' errore dipendente da ciaſcuna delle due cauſe ſeparate ſtia fra $\pm d''$, e *o* ſecondi: per eſempio la ſomma dei due errori può eſſere $\pm 2d''$, $(\pm 2d - 1)''$, $(\pm 2d - 2)''$, ec. delle quali combinazioni ve ne ſono $4d^2$; fra queſte vi ſono $2d^2$, e non più, ciaſcuna delle quali eccede $\dfrac{d''\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ (eſſendo d un numero molto grande); dal che ſi conchiude, che l' error probabile, oſſia quello, per cui vi è una

probabilità pari, che non ſia ſuperato dall' errore dell' oſ-

ſervazione, è $= \frac{d'' \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{17 d''}{29}$ all' incirca.

Se $d'' = 60''$, l' error probabile $= \frac{17 \times 60''}{29} = 35''$ in

circa.

Similmente appariſce, che ſe l' errore nella diviſione del quadrante ſi prende in conſiderazione unitamente agli altri due, e il limite di tal errore è di grandezza eguale dei due primi, cioè d'', l' errore di un' oſſervazione composto dei tre errori mentovati è $0 \pm 3d''$, ovvero $(\pm 3d - 1)''$, ovvero $(\pm 3d - 2)''$, ec. delle quali combinazioni ve ne ha $8d^3$; fra queſte ve ne ſono $4d^3$ e non più, ciaſcuna delle quali eccede $\frac{d''}{1,414}$ (eſſendo d un numero molto grande); donde s' inferiſce, che l' error probabile $= \frac{d''}{1,414}$;

Se $d'' = 60''$, l' error probabile $= 42''$ a un dipreſſo.

4. Sebbene un quadrante aſtronomico ſia eſente da tutti gli errori ſuddetti, ſe il piano di eſſo è inclinato a quello del circolo verticale, in cui è ſituata una ſtella oſſervata, l' altezza dedotta dall' oſſervazione ſarà maggiore della vera.

Se la deviazione del piano del quadrante da quello

del circolo verticale è un angolo incomparabilmente più piccolo dell' altezza, il di cui seno verso $= u$; si faccia il seno dell' altezza osservata $= s$, il coseno $= c$, il raggio $= 1, M^{\circ} = 57^{\circ}.17'45''$; allora la differenza delle altezze osservata, e vera, prodotta dall' inclinazione del quadrante al circolo verticale è $= scuM^{\circ}$

Cor. 1. Essendo data la deviazione del quadrante, l'errore $scuM^{\circ}$ sarà il massimo quando l' altezza $= 45^{\circ}$, perchè il prodotto del seno e coseno di 45° è maggiore del prodotto del seno e coseno di qualsisia altro angolo.

Cor. 2. Se l' altezza è la medesima, l' errore nell' osservare sarà in ragione duplicata della deviazione del piano del quadrante dal verticale, perchè; i seni versi degli archi sono in ragione duplicata degli archi istessi quando questi si diminuiscono senza limite.

L' altezza osservata essendo un picciolo angolo $= d''$, la condizione della proposizione rimane alterata allorchè l' errore del quadrante ha una proporzione considerabile a d''. Se u rappresenta il seno verso dell' error del quadrante come dianzi, l' errore in altezza sarà $= ud''$.

5. Se la linea di collimazione è inclinata al piano di un quadrante altronde accuratamente situato, l' altezza d' una stella dedotta da un' osservazione fatta con esso è maggiore dell' altezza vera.

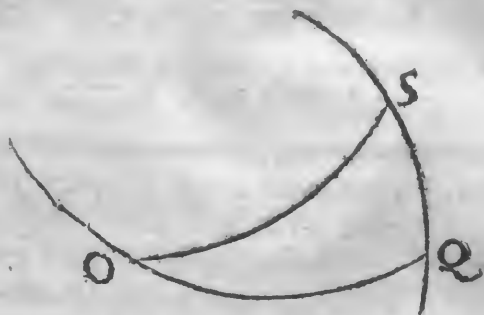
Se l' inclinazione della linea di collimazione al piano del quadrante è un angolo incomparabilmente più piccolo della diſtanza dal zenit, il ſeno verſo del quale $= u$; ſi faccia $T =$ alla tangente dell' altezza oſſervata, $M^o = 57^o. 17'. 45''$, la differenza fra l' altezza vera, e l' oſſervata ſarà $= uTM^o$.

Cor. 1. Data l' altezza, l' errore dell' oſſervazione è in ragione duplicata dell' errore della linea di collimazione.

Cor. 2. Dato l' errore della linea di collimazione, la differenza fra l' altezza oſſervata, e la vera ſarà come la tangente dell' altezza.

Quando la diſtanza oſſervata del zenit è tanto picciola, che l' errore della linea di collimazione ha una proporzione ſenſibile ad eſſa, pongaſi $e =$ all' errore della linea di collimazione, $d =$ alla piccola diſtanza dal zenit, dedotta dall' oſſervazione, l' errore nell' altezza in tal caſo diventa $= \sqrt{(d^2 - e^2)} - d$.

6. Suppongaſi, che un circolo maſſimo paſſi per una ſtella, ed interſechi l' orizzonte in un angolo qualunque; ſe queſto angolo, e l' arco del circolo maſſimo intercetto fra la ſtella, e l' orizzonte ſi trovano coll' oſſervazione, ſi determinerà l' altezza della ſtella ſopra l' orizzonte.

Questo metodo indiretto di misurare l'altezza degli oggetti ha de' vantaggj considerabili.

Rappresenti S il luogo di una stella, SQ l'arco di un circolo verticale che passa per la stella, OQ un arco dell'orizzonte, SO l'arco di un circolo massimo che passa per la stella, ed interseca l'orizzonte nell'angolo SOQ. Secondo il metodo indicato si osserva l'arco OS, e l'angolo SOQ affine di ritrovare l'arco SQ. Supposto, che ciascuna di queste osservazioni cioè di OS, ed SOQ sia soggetta ad un errore $= d''$, sarà la differenza corrispondente nell' arco $SQ = \frac{d'' \text{ tang. } SQ}{\text{tang. } OS} + \frac{d'' \text{ tang. } SQ}{\text{tang. } O}$, la qual quantità, se d'' è data, è la minima, (essendo SQ minore di 30^0); ovvero è la massima possibile, (essendo SQ maggiore di 30^0), allorchè il seno dell' angolo O è medio proporzionale fra il seno di SQ, e il raggio, cioè quando l'ar-

co SO è uguale alla misura dell' angolo SOQ. Sì nell' un caso, che nell' altro si ritrova, che supposto il seno di $SQ = s$ il raggio $= r$ la quantità $\frac{d'' \, tang. \, SQ}{tang. \, OS}$ $+ \frac{d'' \, tang. \, SQ}{tang. \, O}$ è uguale a $2d'' \sqrt{\frac{s}{r+s}}$: ma siccome i due errori accennati non combinano necessariamente o ad accrescere, o a sminuire l' altezza, e possono correggersi, ed anco distruggersi tra di se, si rende chiaro da queste considerazioni, e dalla nota all' art. 3, che l' error probabile, ovvero quello per cui si può scommettere con parità, che l' errore dell' osservazione non lo sorpasserà, è $= \frac{d'' \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{s}{r+s}} = \frac{17 d''}{29} \cdot \sqrt{\frac{s}{r+s}}$ all' incirca: laddove l'errore probabile, che si ha nella misura diretta dell' arco verticale SQ è $= \frac{d''}{2}$, che è in tutti i casi maggiore di $\frac{17 d''}{29} \sqrt{\frac{s}{r+s}}$. Nel determinare le più piccole altezze col metodo indiretto, l' errore probabile diventa affatto insensibile. Per esempio nel misurare un' altezza di 1°, se le osservazioni di OS, ed SOQ sono soggette ad un errore, che può uguagliare, ma non eccedere 60", l' errore probabile nell' altezza è $= \frac{17 \times 60''}{29} \sqrt{\frac{sin. \, 1°}{r + sin. \, 1°}}$, che non è più di 4", 6, laddove l' error probabile, che risul-

terebbe nell' osservazione diretta della medesima altezza, è 30″.

Questi principj possono applicarsi alla costruzione di un micrometro, dalla di cui teoria apparisce, che avendo tutto il riguardo alle imperfezioni inevitabili nella costruzione dello stromento, e nell' osservazione si può determinare il diametro apparente de' pianeti dentro 1″.

7. Se si divide un arco di 15.° 30′ in 30. parti eguali, l'arco contenuto tra le prime due corrispondenti divisioni cominciando dall' una o dall' altra estremità sarà 1′, l'arco tra la due divisioni appresso sarà 2′, tra le altre due appresso 3′, e così in seguito, fino a che l'arco contenuto tra le ultime divisioni corrispondenti = 30′, ovvero $\frac{1}{2}$ grado.

In generale, se un arco, ovvero una linea retta contenente $n + 1$ parti, ciascuna delle quali $= p$, si divide in n parti eguali, la distanza tra le prime due divisioni corrispondenti dalla coincidenza $= \frac{p}{n}$, fra le due seguenti $\frac{2p}{n}$, e così appresso finchè la distanza tra le ultime $= \frac{np}{n}$, ovvero p.

Il *nonio* applicato agli ſtromenti aſtronomici e ad altri è coſtruito ſu queſti principj.

Perchè un arco, che ſottende un ſecondo di un grado, $= \frac{1}{206265}$ parte del raggio, egli è facile il ritrovare la lunghezza di qualunque arco contenuto fra due diviſioni contigue di un quadrante; così ſe il raggio del quadrante è di 3. pollici, e ſe l'arco è diviſo in mezzi minuti, lo ſpazio contenuto fra le due diviſioni contigue $= \frac{1 \times 30 \times 3}{206265}$ $= \frac{1}{2292}$ parte di un pollice.

Se il raggio della terra è di 3970 miglia, ovvero 3970×1760 braccia, ne ſegue, che un ſecondo di un grado miſurato ſopra un circolo maſſimo della terra $= \frac{3970 \times 1760}{206265} = 34$ braccia all' incirca.

Se ſi fanno parecchie oſſervazioni per determinare l'angolo ſotteſo tra due dati oggetti, i riſultati di queſte oſſervazioni differiranno probabilmente tra loro di qualche poco: Si coſtuma in tal caſo di ſommare i riſultati, e di dividere la ſomma pel loro numero; il quoziente ſi chiama il medio del totale, ed in parità di tutto il reſto ſi accoſterà tanto più al vero quanto più grande è il numero delle oſſervazioni, da cui il medio deriva: così ſe p, q, ed r ſono i riſultati di 3. oſſervazioni, il medio delle tre ſarà $\frac{p+q+r}{3}$.

CAPO IV.

CONCLUSIONI PRATICHE DEDOTTE DA' PRINCIPJ PRECEDENTI.

1. LA metà della differenza fra le altezze massima e minima del centro del sole prese in qualsisia data latitudine è uguale all' inclinazione dell' eclittica all' equatore.

L' altezza apparente di tutti i corpi celesti venendo aumentata dalla refrazione, se ne tien conto con rimandare alle tavole, che sono costruite a tal effetto.

L' osservazione dell' altezza di una stella involge la previa determinazione dell' orizzonte: ciò si effettua in due maniere. 1. Con un piombino liberamente pendente, ed in quiete: un piano perpendicolare al piombino debb' essere orizzontale. 2. Col livello.

Se una stella si osserva per riflessione da una liscia superficie orizzontale, l' angolo sotteso dall' immagine e dall' oggetto all' occhio dello spettatore è doppio dell' altezza della stella sopra l' orizzonte.

Per ritrovare l' altezza del centro del ſole, due metodi ſi uſano: 1. Con oſſervare le altezze del punto più alto, e del più baſſo del Diſco: la metà della ſomma è l' altezza del centro del ſole. 2. Con oſſervare l' altezza del punto più baſſo unicamente, e con aggiungervi il ſemidiametro apparente del Sole corriſpondente al tempo dell' oſſervazione, preſo da un' Efemeride dove eſſo è precedentemente calcolato.

2. La latitudine di un luogo è uguale all' altezza del polo dell' equatore ſopra l' orizzonte.

1. La diſtanza tra il zenit, e l' orizzonte è uguale alla diſtanza fra il polo, e l' equatore, ciaſcuna di eſſe eſſendo 90°: tolta la diſtanza del zenit dal polo, che è comune ad ambedue, reſta la diſtanza del polo dall' orizzonte eguale alla diſtanza del zenit dall' equatore, ovvero alla latitudine del luogo.

2. La diſtanza del zenit dal polo è uguale al complemento della latitudine a 90°.

3. Di qui ſi deduce la miſura della circonferenza della terra. E' noto per eſperienza ad un oſſervatore, il quale ſi avanza direttamente ſopra il meridiano per 69,3 miglia nella latitudine di 57°, che la differenza dell' altezza del polo è 1° Da ciò naſce, ſuppoſta la terra perfettamente sferica, che un arco di un grado ſulla ſuperficie della terra = 69,3 miglia, e conſeguentemente la cir-

conferenza della terra — $69,3 \times 360 = 24948$, e il diametro $= 7941$. miglia.

La figura sferoidale della terra produce una picciola differenza nella lunghezza di un grado misurato sopra un circolo massimo della terra in diverse latitudini.

3. Se le altezze massima, e minima di una stella circumpolare si determinano coll' osservazione, la metà della somma è la latitudine del luogo.

La stella volgarmente chiamata polare non è esattamente nel polo dell' equatore; onde il metodo precedente fra gli altri si usa per determinare la vera altezza del polo.

4. L' inclinazione dell' equatore all' orizzonte uguaglia il complemento della latitudine a 90°.

La distanza del zenit dall' orizzonte $= 90^{\circ}$ La distanza del zenit dall' equatore $=$ la latitudine: adunque l'arco del meridiano intercetto fra l' equatore e l' orizzonte debb' essere $=$ al complemento della latitudine a 90°. Quest' arco misura l' inclinazione dell' equatore all' orizzonte, perchè il meridiano è un secondario comune ad ambedue que' circoli.

5. Se si prendono altezze uguali di una stella di qua e di là dal meridiano, il tempo trascor-

ſo tra le oſſervazioni diviſo per mezzo dà l' iſtante, in cui la ſtella ſi trova nel meridiano.

Di qui deriva il metodo uſuale di determinare il meridiano per mezzo di un *teleſcopio de' paſſaggj* previamente diretto al zenit, ed un orologio ben regolato. Se l'iſtante del paſſaggio della ſtella oſſervata nel teleſcopio non divide per metà il tempo ſcorſo fra le oſſervazioni delle altezze uguali, la poſizione dello ſtromento de' paſſaggj dee correggerſi.

La poſizione del teleſcopio meridiano precedentemente diretto al zenit può verificarſi con oſſervare i paſſaggj di una ſtella circumpolare, che paſſa ſopra e ſotto il polo: ſe il tempo ſcorſo fra i paſſaggj non è eſattamente 11^h 58^m $1^s,7$, che è la metà del tempo, in cui una ſtella fiſſa compie la ſua rivoluzione diurna, la linea di collimazione non ſi muove nel piano del meridiano.

6. La declinazione di una ſtella è la differenza della diſtanza meridiana della ſtella dal zenit, e della latitudine del luogo.

Eſſendo nota la latitudine di un luogo, le declinazioni delle ſtelle ſi determinano dall' oſſervazione delle loro diſtanze meridiane dal zenit.

7. La differenza in aſcenſione retta di due

ſtelle computata in tempo è uguale al tempo ſcorſo fra i loro paſſaggj per un dato meridiano.

Di qui ſi può verificare la poſizione di un teleſcopio de' paſſaggj, o di un quadrante aſtronomico previamente adattato al zenit, vale a dire noi poſſiamo aſſicurarci ſe la linea di collimazione ſi muove nel piano del meridiano, con oſſervare i paſſaggj di due ſtelle, le di cui declinazioni ſono notabilmente differenti: ſe il tempo ſcorſo fra i paſſaggj è uguale alla differenza delle aſcenſioni rette delle ſtelle, la linea di collimazione ſi muove nel piano del meridiano; ſe no, è neceſſaria una correzione.

Queſto è il metodo praticato dal Rev. Sig. Maskeline nel ſuo eſperimento ſopra l' attrazione del monte Schehallien deſcritto nelle Trans. Filos. per l' anno 1776.

Data la declinazione di una ſtella nell' eclittica, e l' inclinazione dell' eclittica all' equatore, l' aſcenſione retta ſi determina colla riſoluzione di un triangolo rettangolo.

Le aſcenſioni rette delle altre ſtelle ſi trovano coll' oſſervazione de' loro paſſaggj pel meridiano.

8. La latitudine di un luogo è uguale alla diſtanza meridiana del ſole dal zenit + la declinazione in eſtate, e — la declinazione in inverno.

Quindi ſi raccoglie il metodo uſuale di determinare la latitudine di un luogo con oſſervare la meridiana al-

tezza del ſole, o la diſtanza meridiana dal zenit.

Miſurandoſi accuratamente l' altezza del ſole, o la diſtanza dal zenit, la latitudine ſi ha viciniſſima al vero. Imperciocchè, ſe il luogo del ſole nell' eclittica ſi giudica vero dentro 20″, l' errore della declinazione non può eccedere 7″,9 : ma non ſarà mai tanto fuori che nel caſo eſtremo quando l' errore della longitudine del ſole è il maſſimo poſſibile, cioè 20″, ed il ſole è proſſimo ad uno de' punti equinoziali: noi poſſiamo conchiudere in generale, che la computazione della declinazione del ſole non ſi allontana più di 2″, o 3″ dal vero. L' altezza meridiana, e la declinazione di un oggetto celeſte eſſendo determinata, ed avuto il dovuto riguardo agli effetti della refrazione, ec. può determinarſi la latitudine di un luogo, come ſi ſcorge nell' eſempio ſeguente di un' oſſervazione fatta a Cambridge li 7. Agoſto 1776.

Altezza apparente meridiana del lembo più baſſo del Sole	=	53°. 46′. 8″
Semidiametro apparente del Sole	=	0°. 15′. 50″
Altezza apparente del centro del Sole	=	54°. 1′. 58″
Si ſottragga per la refrazione	=	0°. 0′. 41″
Altezza del centro del Sole	=	54°. 1′. 17″
Diſtanza del centro del Sole dal zenit	=	35°. 58′. 43″
Si aggiunga la declinazione del Sole	=	16°. 13′. 57″
La latitudine di Cambridge	=	52°. 12′. 40″

Allorchè si ricerca un'estrema accuratezza, si debbono introdurre nel calcolo gli effetti della temperatura e del peso dell'atmosfera, e la parallasse del sole; ma le variazioni nell'altezza osservata prodotte da queste cause sono troppo picciole per doversi particolarmente considerare.

9. La latitudine di un luogo, e la declinazione del sole essendo date, si può determinare il tempo apparente da un'osservazione dell'altezza del sole.

La distanza del zenit dal polo, il complemento della declinazione del sole a 90°, e la distanza del sole dal zenit sono i lati di un triangolo sferico, uno degli angoli del quale è quello contenuto tra il meridiano e il circolo di declinazione che passa pel centro del sole, ed è la misura del tempo apparente, il quale in conseguenza viene determinato nella risoluzione del triangolo.

Questo è il metodo di ritrovare il tempo apparente comunemente praticato in mare. Lo stesso problema con osservare l'altezza di una stella fissa nota può sciogliersi con picciolissima variazione nel calcolo: ma in ciascun caso, dacchè è impossibile il misurare le altezze sopra l'orizzonte assolutamente esenti da errore, l'osservazione dee farsi in tal modo, che una data variazione nell'altezza osservata produca la minima possibile variazione nel tempo dedotto; il che si fa con prendere l'altezza del sole,

o della ſtella quando ſono sul primo verticale. Sia $\dot{a}$ = alla data variazione dell' altezza di una ſtella, h' = alla variazione corriſpondente dell' angolo orario; noi avremo $h' = \frac{\dot{a} \times \overline{radius}^2}{cos.\ latit. \times sin.\ azimuth}$. Dunque, eſſendo per un luogo dato $\frac{\overline{rad.}^2}{cos.\ lat.}$ coſtante, ed $\dot{a}$ per ipoteſi invariabile, h', ovvero la variazione dell' angolo orario dedotto dall' oſſervazione ſarà proporzionale a $\frac{1}{ſin.\ azim.}$, la qual quantità è minima quando l' azimut = 90°, o quando il ſole, o la ſtella è ſituata ſul primo verticale.

Cor. I. Di qui è manifeſto, che in parità di tutto il reſto non è di veruna conſeguenza per l' eſattezza del tempo ritrovato l' altezza, nella quale ſi oſſerva una ſtella ſul primo verticale.

Cor. II. Nell' altezza di 52°. 12'. 40" un errore di 1' nell' oſſervare l' altezza di una ſtella ſul primo verticale cagiona un errore di $\frac{1'}{cos.\ 52°.\ 12'.\ 40''} = 97'', 9$ = ſei ſecondi e mezzo nel tempo dedotto.

Se l' oſſervazione ſi fa ſopra qualunque altro verticale, l' errore in altezza eſſendo lo ſteſſo, l' errore nel tempo dianzi ritrovato (di 6½ ſecondi) creſcerà nella ragione del ſeno dell' azimut della ſtella al raggio.

10. Se la differenza del tempo apparente del

giorno in due luoghi qualunque è nota per lo ſteſſo momento, ſi conoſcerà la loro differenza in longitudine.

Uno de' metodi uſati per determinare la differenza di longitudine conſiſte nell' oſſervarſi da due perſone un' ecclisſe del ſole, o di uno de' ſatelliti di Giove, ec. o l' occultazione di una ſtella fiſſa per parte della luna. Se uno di queſti fenomeni è veduto in diverſi tempi apparenti dai due oſſervatori, la differenza di queſti tempi (avendo riguardo agli effetti della parallaſſi, ſe è neceſſario) dà la differenza ricercata della longitudine. Queſto metodo può praticarſi ſolamente in terra. I metodi ſeguenti ſi coſtumano in mare: un oriuolo ben regolato al tempo di un dato luogo venendo portato in mare verſo oriente, o verſo occidente indicherà il tempo apparente (con aggiugnere, o ſottrarre l' equazione) diverſo da quello, che ſi deduce dall' oſſervazione del ſole, o di una ſtella. Queſta differenza di tempo ſi converte facilmente nella differenza della longitudine ricercata. La differenza della longitudine ſi determina ora d'ordinario ſul mare con oſſervare l'angolo ſotteſo dal centro della luna, e da una ſtella fiſſa non molto diſtante dall'orbita della luna.

La diſtanza della luna da diverſe ſtelle fiſſe, e i tempi corriſpondenti ſono calcolati nelle Effemeridi Nautiche pel meridiano di Greenwich; quindi con oſſervare la di-

ſtanza della luna da una ſtella fiſſa può determinarſi il tempo a Greenwich, e conoſcendoſi il tempo nel luogo dell' oſſervazione, la differenza convertita in gradi, e minuti darà la longitudine da Greenwich.

Ma egli è qui neceſſario di ottenere la vera diſtanza della luna dalla ſtella, libera dagli effetti della parallaſſi e della refrazione, che alterando le altezze apparenti della ſtella e della luna cagionano una variazione nella loro diſtanza apparente. Le altezze apparenti del centro della luna, e di una ſtella colla loro diſtanza apparente fra ſe eſſendo date per oſſervazione, noi ottenghiamo la vera differenza dei loro azimut, che non è alterata da refrazione, nè da parallaſſi. Conoſcendoſi le diſtanze apparenti della luna, e della ſtella dal zenit, le loro elevazioni prodotte dalla refrazione, non meno che la depreſſione del centro della luna cagionata dalla parallaſſi ſi renderanno note dalle tavole, d' onde noi ricaviamo le loro vere diſtanze dal zenit: e determinandoſi anticipatamente la differenza degli azimut, la riſoluzione di un triangolo sferico dà la vera diſtanza del centro della luna dalla ſtella. Queſto metodo di ritrovare la longitudine in mare fu prima meſſo in uſo dal Rev. Sig. Maskeline.

11. In una data latitudine neſſuna ſtella, la di cui diſtanza polare è minore della latitudine del luogo, tramonta ſotto l' orizzonte.

12. In latitudini minori di circa 66° 32′ il centro del ſole non può mai eſſere intieramente ſopra, o ſotto l' orizzonte per lo ſpazio di 24. ore.

13. Quando la declinazione del ſole è maggiore della diſtanza del zenit dal polo, il centro del ſole non tramonta ſotto l' orizzonte, o non ſi alza ſopra l' orizzonte ſecondo che la declinazione è della ſteſſa, o di contraria denominazione alla latitudine.

In queſto, e nel precedente articolo non ſi conſiderano gli effetti della refrazione.

14. Se un oſſervatore è ſituato ſotto l' equatore, il piano del ſuo orizzonte è perpendicolare al piano dell' equatore e de' paralleli di declinazione.

La sfera celeſte in queſta poſizione per riguardo all' orizzonte dello ſpettatore ſi denomina *sfera retta*. L' equatore, e tutti i paralleli di declinazione in una sfera retta ſono diviſi per metà dall' orizzonte; conſeguentemente il ſole, e tutte le ſtelle ſono ſopra l' orizzonte per una metà della loro rivoluzione diurna.

I poli del mondo in una sfera retta coincidono coll' orizzonte.

15. Se un oſſervatore è ſituato nell' uno o nell' altro polo, il ſuo orizzonte coincide coll' e-

quatore, e i paralleli di declinazione ſono paralleli all' orizzonte.

La sfera celeſte in queſta poſizione riſpettivamente all' orizzonte dello ſpettatore ſi chiama *sfera parallela*. Il ſole, quando è ſopra l'orizzonte, ſi vede girare in un circolo minore parallelo all' orizzonte, e ad un'altezza ſopra queſto, la quale uguaglia la ſua declinazione.

16. In tutte le altre poſizioni della sfera celeſte, a riſerva delle mentovate, l'orizzonte ſi inclina all'equatore, e a' ſuoi paralleli ſotto un angolo minore di 90°: in queſto caſo la poſizione della sfera ſi dice *obliqua*.

Se ſi guida una tangente alla ſuperficie del ſole e della terra nello ſteſſo piano colla linea che congiugne i loro centri, un circolo deſcritto pel punto di contatto ſulla ſuperficie della terra, il di cui piano ſia perpendicolare alla predetta linea, ſarà il circolo che termina la luce e l'ombra. Il piano di queſto circolo paſſa proſſimamente, ſebbene non eſattamente pel centro della terra; eſſo può conſiderarſi come un circolo maſſimo fuorichè allora quando ſi ricerca un' eſtrema eſattezza.

17. Quando il ſole è in uno de' punti equinoziali, il circolo, che termina la luce e l' om-

ra, coincide coi poli del mondo, e in confeguenza divide per mezzo tutti i paralleli all'equatore.

Di qui nafce, che quando il fole è nell'uno, o nel'altro de' punti equinoziali, i giorni e le notti in tute le parti della terra fono uguali.

18. Quando la declinazione del fole è auftrale, il circolo divifore della luce e dell'onbra taglia i paralleli boreali di latitudine difugualmente, effendo maggiore quella parte di effi la quale giace fuori del circolo di illuminazione.

Quindi è, che le notti fono più unghe dei giorni per gli abitanti de' paralleli boreali qundo il fole è al mezzodì dell'equatore.

19. Succede appunto il contrario quando la declinazione del fole è boreale.

20. Allorchè la declinazione delfole è maggiore del complemento di latitudine a 90°, il parallelo di latitudine, che paffa pel luogo, cade o interamente al di dentro, o interamene al di fuori del circolo di illuminazione.

Il centro del fole adunque apparirà o totalmente fopra, o totalmente fotto l'orizzonte agli abitanti di quel parallelo, fecondo che la declinaone è della medefima, o di contraria denominazione alla latitudine del luogo.

CAPO V.

DELLA GNOMONICA, E DELL' USO DELLO STROMENTO EQUATORIALE.

1. SE iraggi di luce vegnenti dal centro del ſole illumiano una linea retta parallela all' aſſe della terra l' ombra della linea ſarà nel medeſimo piano col crcolo di declinazione, che paſſa pel centro del ſole.

L' ombra d una linea è un piano che paſſa per la linea e pel centro del ſole: l' ombra indicata nella propoſizione taglia l' orizzonte, e qualunque altro circolo maſſimo dato di poſizione nella ſteſſa retta linea per un dato tempo del giorno qualunque ſia la declinazione del ſole.

2. Se ſi applica una linea al centro di un circolo, il di cui piano è dato di poſizione, e queſta linea ſi fa parlela all' aſſe della terra, l' inclinazione dell' omra della linea al piano

del meridiano è la misura del tempo apparente del giorno, contando un' ora per 15°, ec.

Da ciò segue, che se si projettano de' circoli di declinazione sopra qualunque piano dato di posizione, e nella loro comune intersezione si applica una linea al piano, parallela all' asse della terra, l' ombra della linea determinerà il tempo apparente del giorno.

3. L' asse di una sfera, sopra cui sono descritti i circoli di declinazione, si diriga al polo celeste. Venendo la sfera tagliata per mezzo dal piano di ogni circolo massimo, la sezione sarà un orologio solare, del quale l' asse della sfera si chiama lo *stile*.

L' intersezione dell' orologio col meridiano è marcata XII., l'intersezione del circolo orario adjacente inclinato al meridiano sotto un angolo di 15° è marcata I., e così in seguito, i tempi intermedj essendo marcati nelle intersezioni de' circoli corrispondenti di declinazione col piano dell' orologio. Siccome, quando l' angolo orario è lo stesso, la sezione dell' ombra dello stile è la stessa, qualunque sia la declinazione del sole; ne segue, che tutte le volte che il sole illumina lo stile, essendo dato il tempo del giorno, l'ombra intersecherà sempre l' oro-

logio nella medesima linea retta; questa linea adunque determinerà il tempo apparente.

Un orologio è chiamato verticale, orizzontale, equatoriale ec. secondo che il suo piano coincide con quello di un circolo verticale, coll' orizzonte, o coll' equatore celeste.

4. Lo stromento equatoriale è composto di tre circoli, i di cui piani possono talmente affestarsi, che vengano a coincidere coi piani dell' orizzonte, dell' equatore, e di un qualche dato circolo di declinazione rispettivamente.

Si adatta un telescopio al circolo di declinazione, al di cui piano è parallela la linea di collimazione.

Gli usi più comuni, ai quali si applica lo stromento equatoriale, sono i seguenti.

1. A determinare la posizione del meridiano con una sola osservazione.

2. A ritrovare il tempo apparente del giorno.

3. A dirigere il telescopio a qualunque punto nel cielo, del qual punto sieno note l'ascensione retta, e la declinazione.

Ad effetto di sciogliere questi problemi, lo stromento dee prima rettificarsi alla latitudine del luogo.

5. Si inclini il circolo equatoriale all' oriz-

zonte ſotto un angolo = al complemento della latitudine a 90° Lo ſtromento è accomodato alla latitudine.

Perciocchè appunto l'inclinazione dell'equatore celeſte all'orizzonte è uguale al complemento della latitudine a 90°.

6. Per determinare il meridiano, convien adattare il circolo di declinazione alla declinazione di una ſtella conoſciuta. Se ſi porta la ſtella nel centro del campo per mezzo del circolo equatoriale, e dell'azimut, il piano del circolo equatoriale coinciderà con quello dell'equatore celeſte, poſti da parte gli effetti della refrazione.

Perciò il piano di un ſecondario al circolo equatoriale, ed all'azimut coinciderà col piano del meridiano, al quale ſi dirigerà la linea di collimazione, quando l'indice equatoriale marca XII.

7. Lo ſtromento eſſendo accomodato alla latitudine, ſi adatti il circolo di declinazione alla declinazione del ſole corriſpondente al tempo dell'oſſervazione: ſe la linea di collimazione ſi dirige al centro del ſole con muovere il circolo

equatoriale, e l'azimut ne' loro piani, l' arco del circolo equatoriale intercetto tra XII. ed il punto, a cui l'indice è diretto, determinerà il tempo apparente del giorno.

In questo caso il circolo equatoriale diventa un orologio solare, il di cui piano è perpendicolare allo stile, ovvero, come volgarmente si nomina, è un orologio equatoriale. E' da osservarsi, che in ambedue i precedenti articoli l'elevazione apparente degli oggetti celesti sopra i loro luoghi veri, prodotta dalla refrazione, farà deviare un poco dal vero la posizione del meridiano, ed il tempo dedotto dall'osservazione col telescopio equatoriale. Questi errori così nell'angolo orario, come nell'azimut possono computarsi in questo modo: Rappresenti $\dot{r}$ l'elevazione apparente della stella o del centro del sole prodotta dalla refrazione: s l'angolo contenuto fra un circolo verticale, ed un circolo di declinazione che passa per la stella, allora la variazione dell'angolo orario prodotta dall'elevazione apparente della stella $= \dfrac{\dot{r}}{cos.\ lat. \times sin.\ azim.}$, e la variazione contemporanea nell'azimut

$= \dfrac{\dot{r}\ cotang.\ s}{Sin.\ distanza\ della\ stella\ dal\ zenit}$. Siccome per le proprietà dello stromento equatoriale aggiustato a dovere, il piano del circolo di declinazione è sempre verticale quan-

do l'indice equatoriale marca XII., ne viene in confeguenza, che la pofizione del meridiano ritrovata all'art. 6. fi correggerà con muovere il circolo azimut in una direzione contraria all' azimut del fole per un arco

$$= \frac{r\ cot.\ s}{fin.\ diftanza\ dal\ zenit}.$$

Può conchiuderfi di qui, che nella latitudine di 52°. 12'. 40" la refrazione non produrrà alcun errore nella pofizione del meridiano determinata come nell' art. 6, quando la declinazione, e l'altezza offervata della ftella = 62°. 45'.

8. Si adatti lo ftromento alla latitudine, ed al meridiano; fe il circolo di declinazione fi colloca nella declinazione di qualche ftella, ec. ed il circolo equatoriale fi muove nel fuo piano, la linea di collimazione fi dirigerà fempre allo fteffo parallelo di declinazione, che la ftella defcrive nel fuo moto diurno.

Quindi fi raccoglie, che fe fono date l'afcenfione retta, e la declinazione di una ftella, la linea di collimazione del telefcopio equatoriale può dirigerfi ad effa; e perciò Giove, Venere, e le ftelle fiffe di prima grandezza fi poffono offervare in tempo di giorno.

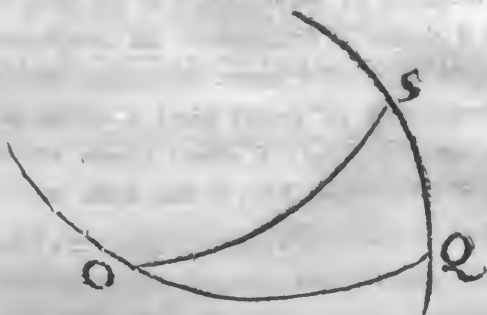
9. L'altezza d'un oggetto celeſte ſopra l'orizzonte può miſurarſi ſul circolo di declinazione dello ſtromento equatoriale.

Quando l' indice equatoriale marca XII., il piano del circolo di declinazione paſſa pel zenit: la linea di collimazione adunque eſſendo ridotta orizzontale, e diretta ad una ſtella con muovere il circolo di declinazione e l'azimut ne' loro piani, l' indice del circolo di declinazione determinerà l'arco del circolo verticale intercetto fra la ſtella, e l'orizzonte.

10. L'altezza di un oggetto celeſte può determinarſi con miſurare l'arco di un circolo maſſimo intercetto fra la ſtella, e l'orizzonte, e l'inclinazione dello ſteſſo circolo maſſimo all' orizzonte.

Queſto è il metodo deſcritto nel Capo della *Miſura degli angoli* art. 6., e può metterſi in pratica per mezzo dello ſtromento equatoriale così: Sia s il ſeno dell' altezza ſtimata dell' oggetto: ſi innalzi il circolo equatoriale ſopra l'orizzonte ad un angolo, il di cui ſeno $= \sqrt{s}$; eſſendo il raggio $= 1$. Il circolo di declinazione eſſendo poſto al o, ſi diriga la linea di collimazione alla ſtella con muovere il circolo equatoriale, e l'azimut ne' proprj pia-

ni; si osservi l' arco del circolo equatoriale intercetto fra l'indice e VI.; se il seno di quest' arco = p, il seno dell' altezza osservata sarà eguale a $p\sqrt{s}$ posto il raggio 1.

11. Rappresenti Q il zenit, S il

luogo di una stella, QS, e QO gli archi di due circoli verticali; SO un circolo massimo, che passa per la stella, ed è uguale a QO. Se l'arco QO, e l' angolo SOQ si determinano coll' osservazione, la distanza SQ dal zenit si renderà nota.

Questo metodo di determinare la distanza dal zenit è simile alla misura indicata delle altezze dianzi descritta, ed è capace di grande esattezza, quando l' arco da misurarsi è picciolo, specialmente perchè la linea di collimazione per la costruzione dello stromento equatoriale può accuratamente applicarsi al zenit.

Lo ſtromento equatoriale può applicarſi a queſto metodo per mezzo delle regole ſeguenti: Sia s il ſeno della diſtanza ſtimata dal zenit: ſi trovi un angolo, il di cui ſeno è $\sqrt{s}$, poſto il raggio 1. Si innalzi il circolo equatoriale ſopra l'orizzonte ad un angolo, il di cui ſeno $= \sqrt{s}$: e ſi metta il circolo di declinazione nel complemento dello ſteſſo angolo a 90°. Per mezzo del circolo equatoriale, e dell' azimut moſſi ne' proprj piani ſi diriga la linea di collimazione alla ſtella: ſi oſſervi l'arco intercetto fra l'indice equatoriale, e XII.; il ſeno della metà di queſt' arco, moltiplicato in $\sqrt{s}$ (poſto il raggio $= 1$) ſarà il ſeno della metà della diſtanza ricercata dal zenit.

CAPO VI.

DELLA PARALLASSI, E DELLA DETERMINAZIONE DELLE DISTANZE INACCESSIBILI.

1. SI tiri una linea perpendicolare alla diſtanza fra un oggetto adjacente ed una data ſtazione, i luoghi apparenti dell' oggetto guardato dalle eſtremità della linea ſaranno differenti

1. La linea perpendicolare mentovata ſi chiama *baſe*.
2. Le eſtremità della baſe ſi dicono *ſtazioni*.
3. L'angolo ſotteſo dalle eſtremità della baſe all' oggetto ſi nomina *angolo di parallaſſi*.
4. La baſe ſta alla minore delle due diſtanze dell' oggetto dalle eſtremità della baſe come la tangente della parallaſſi al raggio, e alla maggiore come il ſeno dello eſſo angolo al raggio.

2. Suppoſto, che ſi guidino delle linee dalle due ſtazioni ad un oggetto, eſſendo retto uno

degli angoli contenuti da queste linee e dalla base, l'altro sarà il complemento della parallassi a 90.°

Quindi se si conoscono gli angoli alle stazioni terminanti una data base; la parallassi, e conseguentemente la distanza dell' oggetto può determinarsi.

3. Se la distanza di un oggetto è maggiore di 100000. volte la base, gli angoli alle stazioni non differiranno sensibilmente da due retti; onde le linee condotte dall' oggetto alle stazioni sono fisicamente parlando parallele.

Uno degli angoli alla base in tutte le proposizioni contenute in questa sezione si suppone di 90°.

Il più esatto stromento costruito per la misura degli angoli non può dare una sicurezza maggiore di 2″, la di cui tangente sta al raggio, come 1 a 103132.

L'angolo, la di cui tangente sta al raggio, come 1 a 100000, è 2″,06. ovvero poco più di due secondi.

4. La parallassi di un oggetto, il quale è sopra 100000. volte più distante dalle due stazioni dell' osservazione, è insensibile.

Se l'oggetto è ad una distanza maggiore dall' una o l'altra stazione che 100000. volte la base, l'angolo ad

una delle ſtazioni eſſendo 90°, l'angolo all'altra ſarà più di 89°. 59'. 57", 9, la differenza del qual angolo da 90°. eſſendo appena più di 2". è troppo piccola per renderſi ſenſibile coll'oſſervazione

5. Se la parallaſſi di un oggetto oſſervato con uno ſtromento ſufficientemente eſatto per miſurare un angolo di 2" è inſenſibile, la diſtanza di queſto dall'una o l'altra ſtazione non può eſſer minore di 100000. volte la baſe, dalle eſtremità della quale viene oſſervato.

E' da notarſi, che quantunque la diſtanza dell'oggetto non poſſa eſſer minore di 100000. volte la baſe, tuttavia può eſſere maggiore in ogni ragione aſſegnabile.

Le linee condotte dai punti dati in una baſe ad un oggetto poſſono averſi in pratica per parallele ſenza errore ſenſibile, ſe la diſtanza dell'oggetto è più di 100000. volte la base.

I raggj divergenti da qualſivoglia punto del diſco del ſole ſulla ſuperſicie della terra poſſono riguardarſi come paralleli, ſe la loro diſtanza tra ſe non eccede circa 1000. miglia ſulla ſuperficie della terra: perchè 1000. miglia ſtanno alla diſtanza della terra dal ſole in proporzione poco maggiore di 1 a 100000. Nella ſteſſa maniera i piombini liberamente pendenti, ed immobili, qualora non ſieno tra ſe diſtanti per più di circa 68. braccia, poſſono contarſi come paralleli.

I raggi divergenti da una ſtella fiſſa alle parti qualiſivogliano dell' orbita terreſtre, ſono fiſicamente parlando paralleli, perchè la parallaſſi dell' orbita della terra veduta dalla ſtella è minore di 2″.

Due piani tra ſe paralleli, che paſſano per le eſtremità di un diametro dell' orbita terreſtre, qualora vengano prodotti, appariranno coincidere collo ſteſſo circolo maſſimo celeſte, perchè il diametro dell' orbita della terra veduto dalla ſtella fiſſa ſottende un angolo minore di 2″. Similmente ſe un piano, che paſſa pel centro della terra, è parallelo ad un piano, che tocca la ſuperficie, queſti piani prolungati coincidono apparentemente col medeſimo circolo maſſimo celeſte.

CAPO VII.

DEL SISTEMA SOLARE.

1. IL ſiſtema ſolare conſiſte nel Sole, e ne' Pianeti, e nelle Comete, che intorno ad eſſo ſi muovono.

2. Sonovi ſei pianeti primarj, cioè Mercurio, Venere, la Terra, Marte, Giove, e Saturno, i quali tutti ſi aggirano ſecondo l'ordine de' ſegnî in orbite preſſo a poco circolari intorno al Sole come centro.

La rivoluzione annua apparente del ſole nell' eclittica naſce dal moto reale della terra nella ſua orbita. Venere, e Mercurio ſi muovono in orbite, le quali ſono contenute dentro quella della terra, e ſono chiamati *Pianeti inferiori*. Marte, Giove, e Saturno, che ſi aggirano in orbite eſteriori all' orbita della terra, ſi nominano *Pianeti ſuperiori*. Le orbite di tutti i pianeti ſono ellittiche; ma i fenomeni principali, che dimoſtrano la verità del ſiſtema Co-

pernicano, sono i medesimi sia che le orbite si considerino come ellittiche, sia che si considerino come circolari. Quest' ultima supposizione si adotta comunemente nel dare una descrizione generale della disposizione, e del moto de' corpi celesti.

3. I piani delle orbite, in cui i pianeti si muovono, sono inclinati diversamente al piano dell' eclittica, ma niuno arriva ad esserlo di 8.°

Le latitudini di due pianeti quali essi siano non possono giugnere a differire di 16°.

4. Tre de' pianeti primarj hanno satelliti, ossia pianeti secondarj, i quali si muovono intorno ai primi come centri in orbite a un dipresso circolari, e gli accompagnano nelle loro rivoluzioni intorno al sole.

5. La Luna è l' unico satellite che corteggia la terra, e compie la sua rivoluzione periodica in 27 giorni, 7 ore incirca, descrivendo un orbita, la quale è inclinata al piano dell' eclittica sotto un angolo di circa 5.°

Se i tempi periodici di due corpi celesti sono a, e b, il periodo sinodico sarà $= \frac{ab}{a-b}$, supposte le loro orbite circolari, e il loro moto uniforme.

Il tempo periodico della luna = 27, 29 giorni; il tempo periodico della terra = 365, 25. giorni; perciò un mese sinodico $= \frac{365,25 \times 27,29}{365,25 - 27,29} = 29,49$, ovvero circa 29. giorni e mezzo.

6. Osservasi la luna volgere la stessa faccia verso la terra in ogni parte della sua rivoluzione.

Di qui si conchiude, che la luna gira intorno al suo asse, che è a un dipresso perpendicolare al piano della sua orbita, nel medesimo tempo che ella compie la sua rivoluzione intorno alla terra.

7. Quattro satelliti si muovono intorno a Giove, e cinque intorno a Saturno.

8. Saturno è circondato da un anello luminoso, la di cui apparenza varia secondo le diverse posizioni dello spettatore.

9. I pianeti, e i loro secondarj sono corpi sferici, e opachi.

10. La terra gira intorno al suo asse, che è inclinato al piano dell' eclittica sotto un angolo di 66°. 32', compiendo il suo giro in $23^h. 56^m. 4^s$.

La rivoluzione diurna apparente del sole, e delle

ſtelle da oriente in occidente naſce dalla rotazione reale della terra intorno al ſuo aſſe da occidente in oriente.

Se il luogo del ſole nell' eclittica foſſe ſempre lo ſteſſo, 360° dell' equatore paſſerebbono ſotto un dato meridiano fra il tempo della partenza e del ritorno del ſole allo ſteſſo meridiano. Ma ſiccome il mezzano aumento dell' aſcenſione retta del ſole in 24. ore è 59'. 8", ne viene in conſeguenza, che in 24. ore, o in un giorno medio ſolare 360°. 59'. 8" dell' equatore paſſeranno ſotto un dato meridiano: dal che noi ricaviamo il tempo della rivoluzione diurna della terra intorno al ſuo aſſe colla ſeguente proporzione, come 360°. 59'. 8" : 360° così 24^h a 23^h. 56^m. 4^s tempo ricercato.

Il circolo maſſimo celeſte, nel di cui piano la terra compie il ſuo giro diurno, ſi chiama equatore. Le ſtagioni diverſe dell' anno ſono prodotte dall' inclinazione dell' eclittica all' equatore.

11. Si è oſſervato, che altri pianeti ſi aggirano intorno ai loro aſſi.

Le rotazioni diurne di Giove, Marte, e Venere ſi ſono ſcoperte dalle macchie, che ſono viſibili ſu i loro diſchi; ſe ſi oſſerva una qualunque di queſte macchie, ſi vede, che gira ritornando alla ſteſſa poſizione, da cui ſi è partita, in intervalli di tempo eguali.

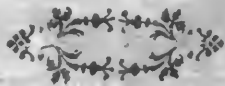
Dalle macchie sul disco si è scoperto, che il sole gira intorno al suo asse in 25. giorni all'incirca.

12. La Terra è circondata da un fluido raro trasparente, chiamato collettivamente *atmosfera*.

L'atmosfera è la ragione del crepuscolo, dell'apparente elevazione delle stelle sopra i loro luoghi veri, e della diffusione generale de' raggj del *sole*.

13. Le Comete sono una specie di pianeti, che si muovono in ellissi molto eccentriche intorno al sole, che è situato in uno de' fuochi.

Le comete si vedono muoversi tanto secondo l'ordine de' segni che in direzione contraria.

I piani delle loro orbite sono inclinati al piano dell' eclittica sotto varj angoli, non essendo confinate dentro alcun limite.

CAPO VIII.

DE' FENOMENI, CHE DIMOSTRANO LA VERITA' DEL SISTEMA COPERNICANO; E DI ALCUNI COROLLARJ.

1. VEnere, e Mercurio non si vedono mai in opposizione al Sole.

Un pianeta si dice in opposizione, quando le longitudini del sole e del pianeta differiscono di 180°.

2. L' angolo di elongazione di un pianeta inferiore dal sole non passa mai un certo limite.

3. I pianeti superiori si vedono essere alcune volte in opposizione, ed alcune in congiunzione.

4. I pianeti superiori sono retrogradi in opposizione, e progressivi in congiunzione.

5. Vi ha un certo angolo di elongazione dal sole, nel qual angolo un pianeta apparisce stazionario guardandolo dalla terra.

Il tempo periodico di un pianeta ſuperiore ſtia a quello di un inferiore, come 1 : t, e le loro diſtanze dal ſole ſieno come 1 : s. Un angolo, il di cui coſeno $= \sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}}$, poſto il raggio 1, ſarà l'angolo di elongazione dal ſole, nel qual angolo il pianeta inferiore appariſce ſtazionario guardandolo dal ſuperiore. L'angolo di elongazione di un pianeta ſuperiore, quando è veduto ſtazionario da un inferiore, è ottuſo, ed il ſuo ſeno $= \frac{1}{s}\sqrt{\frac{s^2-t^2}{1-t^2}}$ poſto il raggio 1.

Qui ſi ſuppone, che i pianeti ſi muovano uniformemente ne' medeſimi piani, ed in circoli, il comun centro de' quali coincide col centro del ſole.

L'oſſervazione delle ſtazioni de' pianeti devierà in conſeguenza alcun poco dalle regole precedenti.

6. Uno ſpettatore ſulla terra vede ſoltanto quella parte del diſco di un pianeta, la quale è contenuta tra i circoli di viſione, e d' illuminazione.

Quindi è, che la luna, e i pianeti inferiori appariſcono cornuti quando ſono ſituati tra la Terra ed il Sole.

I circoli di viſione e di illuminazione nei pianeti Giove, e Saturno coincidono ſempre così dappreſſo, che queſti pianeti ſi veggono in tutte le ſituazioni riſplendere con pieno diſco.

N 3

In Marte, quando ſi avvicina alla Quadratura; queſti circoli eſſendo tra ſe inclinati, fanno sì, che una parte del diſco illuminato ſi ſottragga alla noſtra viſta: in queſta poſizione Marte ſi dice eſſere *gibboſo*.

7. La parallaſſi del ſole è circa $8''\frac{1}{2}$.

Queſta è la parallaſſi del ſole veduto nel Zenit, e nell' Orizzonte, ovvero la parallaſſi Orizzontale. Laonde il ſemidiametro della Terra ſta alla diſtanza della Terra dal Sole come il ſeno di $8''\frac{1}{2}$ al raggio, ovvero come 1:24266, e ſiccome il raggio della Terra = 3970 miglia, la diſtanza del Sole dalla Terra = 24266 × 3970 = 97000000. miglia a un dipreſſo.

8. La paralaſſi di una ſtella fiſſa ſituata nel polo, o vicina al polo dell' eclittica non è ſenſibile.

La parallaſſi è dunque minore di $2''$, e conſeguentemente la diſtanza della Stella maggiore di 100000. volte la baſe, dalle di cui eſtremità viene oſſervata, cioè maggiore di 100000. volte il diametro dell' orbita della Terra, ovvero maggiore di 100000 × 194000000. miglia.

9. La parallaſſi di una ſtella fiſſa non eſſendo più di $2''$, il ſole veduto dalla ſtella apparirebbe

ſotto un angolo minore di $\frac{32'.6''}{200000}$, ovvero minore della centeſima parte di un ſecondo, e per conſeguenza non ſi diſtinguerebbe da un punto.

Poichè i corpi uguali in grandezza e ſplendore al ſole, venendo collocati alla diſtanza delle ſtelle fiſſe ci apparirebbono come ci appariſcono ora le ſtelle, ſi può ſubito inferire, che le ſtelle fiſſe ſono corpi per ogni riguardo ſimili al ſole, che è il centro del ſiſtema ſolare.

Ciò poſto ſi vede chiaro, perchè una ſtella fiſſa guardata con un teleſcopio, che ingrandiſce dugento volte, non compariſca altro che un punto. Imperciocchè il diametro apparente della ſtella eſſendo minore di $\frac{1}{100}$ parte di un ſecondo, ſottenderà quando ſia ingrandito dugento volte un angolo di meno che 2″ all'occhio di uno ſpettatore, che lo oſſerva nel teleſcopio.

La parallaſſi della ſtella fiſſa veduta dalle parti oppoſte dell'orbita della terra, ſi aſſume qui di 2″; ma egli è probabile, che la parallaſſi della ſtella a noi più vicina ſia molto minore, e per conſeguenza la diſtanza tanto più grande nella ſteſſa proporzione quanto la parallaſſi è più piccola.

10. L'apparenza delle ſtelle fiſſe in Cielo è per ogni riguardo la medeſima, in qualunque

parte dell' orbita della terra, o anco dell' orbita di Saturno ſia ſituato lo ſpettatore.

11. La mutazione di luogo, o la parallaſſi della luna, quando è veduta nel zenit, e nell' orizzonte, è per adequato di 57′.

12. Le Comete non hanno parallaſſi diurna ſenſibile.

Qnindi naſce, che la diſtanza delle comete eſſer dee maggiore che quella della luna dalla terra.

13. Le Comete ſi veggono mutare i loro luoghi in Cielo a motivo del moto della terra nella ſua orbita.

Da ciò ſi deduce, che le comete, quando ſono viſibili, ſi trovano e dentro le regioni del ſiſtema ſolare, e non molto lontane dall'orbita di Saturno.

CAPO IX.

DELLE ECCLISSI.

1. I Pianeti, ed i loro ſecondarj riſplendono per la luce del ſole da eſſi riflettuta.

2. Un corpo opaco interpoſto fra il pianeta ed il ſole impedirà parte, o anche tutti i raggj di luce di arrivare al pianeta, ſecondo la grandezza, e vicinanza del corpo opaco.

Una sfera ſottendente un angolo all' occhio dello ſpettatore eguale, o maggiore del diametro apparente del ſole, intercetterà totalmente i raggj di luce, ſe il centro di eſſa ſarà in una linea, che congiugne il centro del ſole, e l' occhio dello ſpettatore.

3. L' ombra della terra è di una lunghezza determinata, ed ecclíſſa totalmente il ſole a qualunque parte della ſuperficie della luna, ſituata nell' ombra.

La figura dell'ombra della terra è un cono, il di cui asse è una continuazione della linea, che unisce i centri della terra e del sole; stando la terra tra il sole e il vertice dell'ombra.

La lunghezza dell'ombra d'un pianeta sta al semidiametro del pianeta, come il raggio al seno del semidiametro apparente del sole.

4. Suppongasi, che la posizione dell'ombra si inverta, cosicchè il vertice del cono stia fra il sole ed il pianeta, restando l'asse nella medesima posizione di prima; una continuazione di questo cono cresciuto senza limite si nomina *penombra*.

5. Se uno spettatore è situato nella penombra d'un pianeta, una parte della luce del sole sarà sottratta alla sua vista.

6. Il sole non è mai ecclissato fuorchè al tempo di una nuova luna; e la luna non è mai ecclissata se non quando è piena.

7. Le ecclissi della luna, e del sole accaderebbono ad ogni plenilunio, o novilunio, se il piano dell'orbita della luna coincidesse col piano dell'eclittica.

8. Il piano dell'orbita della luna è inclinato a quello dell'eclittica sotto un angolo di circa 5.°

La linea, in cui questi piani s'intersecano, si chiama *linea dei nodi*.

9. Se la distanza angolare del centro della luna dal nodo in tempo del novilunio è minore di circa sedici gradi e mezzo, vi sarà un'ecclissi del sole.

10. Se la distanza angolare del centro della luna piena dal nodo è minore di circa dodici gradi e mezzo, la luna sarà ecclissata.

I limiti delle ecclissi solari essendo maggiori de' limiti delle ecclissi lunari, accaderà in un dato tempo un maggior numero di ecclissi del sole, che della luna. Ma un' ecclisse della luna è visibile agli abitanti di una metà del globo; laddove un' ecclisse solare si può soltanto vedere in una piccola porzione della superficie della terra: per questa ragione in un dato luogo saranno visibili in un certo tempo più ecclissi della luna, che del sole.

11. Nessun pianeta primario può cadere nell' ombra di un altro primario, ma parte della superficie di un pianeta può venire ecclissata col cadere nell' ombra del suo secondario.

Ogni pianeta può cadere nella penombra di un pianeta inferiore.

12. Quando la terra cade nella penombra di Venere, o Mercurio, i raggi del ſole ſono in parte tolti alla noſtra viſta, ed il pianeta nel paſſare ſopra il ſole compariſce come una macchia nera ſul diſco.

13. Mercurio, e Venere ſi vedrebbono paſſare ſopra il diſco del ſole ad ogni congiunzione inferiore, ſe i piani delle loro orbite coincideſſero con quello dell' eclittica.

CAPO X.

DEI FENOMENI DIPENDENTI DALL' ECCENTRICITA' DELL' ORBITA DELLA TERRA; E DELLA DIVISIONE DEL TEMPO.

1. IL diametro apparente, e il moto orario del Sole ſi vedono variare a miſura che la terra ſi aggira nella ſua orbita: e le variazioni ſono tali, che dimoſtrano l' orbita ellittica.

Se l' orbita della terra ſi ſuppone un circolo eccentrico ſecondo l' idea di alcuni Aſtronomi antichi, le illazioni cavate da queſta ipoteſi diſcordano dall' oſſervazione. Se ſi ſuppone, che la terra ſi muova in un' elliſſe intorno al ſole poſto in uno de' fuochi, tutte le deduzioni tratte da queſta ſuppoſizione concordano preciſamente coi fenomeni.

2. Suppoſto, che ſi conoſcano l' eccentricità, e l' aſſe maggiore dell' orbita della Terra, ſe il

luogo del ſole nell' eclittica è dato, può determinarſi il ſemidiametro apparente del ſole.

In qualunque elliſſe ſia t = al ſemiaſſe maggiore
c = al ſemiaſſe minore
m = all' eccentricità.

Si prenda un punto nella circonferenza dell' elliſſe, e ſi tiri una linea, che congiunga il detto punto, ed il fuoco. Sia l = al coſeno dell' angolo contenuto fra la linea tirata, come dianzi, e l' aſſe maggiore; allora la diſtanza del predetto punto dal fuoco $= \frac{c^2}{t \pm lm}$

Di qui immediatamente ſi arguiſce, che ſe d″ è il ſemidiametro apparente del ſole allorchè ſi trova nella ſua mezzana diſtanza dalla terra; in qualunque altra poſizione, in cui il coſeno della longitudine del ſole dall' apogeo $= l$, il ſemidiametro apparente ſarà $= d'' t \left(\frac{t \pm lm}{c}\right)$.

E' manifeſto, che l' oſſervazione del ſemidiametro apparente del ſole ſi accorda eſattamente colla precedente deduzione formata a priori dall' ipoteſi ellittica, della quale queſt' accordo è una conferma.

Per dichiarare ciò con un eſempio, ſi cerchi di determinare il ſemidiametro apparente del ſole, quando la ſua longitudine = 71°. 25′. 40″ nell' anno 1776., ſupponendo l' eccentricità dell' orbita della terra 16, 83, il ſemiaſ-

ſe maggiore 1000, e il ſemidiametro mezzano del ſole $16'. 2'', 8$.

Quando la longitudine del ſole $= 71^{\circ}. 25'. 40''$, la ſua diſtanza angolare dall' apogeo $= 99^{\circ}. 16' - 71^{\circ}. 25'. 40'' = 27^{\circ}. 50'. 20''$; ſia il coſeno di $27^{\circ}. 50'. 20'' = l$. Dai precedenti dati, e dalla regola ſopra recata noi ricaviamo il ſemidiametro apparente del Sole $= 1000 \times 962'', 8 \times$

$$\times \frac{1000 - cos.\ 27^{\circ}.\ 50'.\ 20'' \times 16,\ 83}{999716} = 15'.\ 48'',\ 74.$$

E' chiaro eziandio, che eſſendo d'' il moto orario apparente del Sole nell' eclittica quando ſi trova nella mezzana diſtanza: il moto orario quando il ſole è in qualunque punto dell' eclittica (poſto l pel coſeno della longitudine dall' apogeo) ſarà $= d'' \, t^2 \frac{(t \pm lm)^2}{t^4}$.

Queſte concluſioni, e qualſivoglia altre in ſimil modo dedotte pel ſemidiametro apparente, e pel noto orario del ſole ad una longitudine data non differiſcono ſenſibilmente dall' oſſervazione; il che è fralle altre una dimoſtrazione, che l' orbita, in cui ſi aggira la terra, è un' elliſſe, in cui il ſole occupa uno de' fuochi.

3. Una linea, che congiugne la terra ed il ſole, deſcrive aree eguali in tempi eguali durante la rivoluzione della terra nella ſua orbita.

Dacchè l' interſezione dell' eclittica e dell' equatore di-

vide l' arco dell' orbita della terra disugualmente; ne viene in conseguenza, che i tempi dell' ingresso del sole negli equinozj di primavera, e di autunno divideranno l' anno disugualmente.

L' aumento giornaliero dell' ascension retta del sole è variabile per due capi. 1. Per la variazione della velocità angolare del Sole nell' eclittica. 2. Per l' inclinazione dell' eclittica all' equatore. Di qui nasce l' ineguaglianza de' giorni solari; un giorno solare è il tempo trascorso fra il partire e il ritornare del sole ad un dato meridiano: la sua lunghezza può determinarsi così: Sia $t =$ al tempo della rotazione della terra intorno al suo asse: a l' accrescimento dell' ascensione retta del sole in 24 ore; noi abbiamo questa proporzione $360^{\circ} : 360^{\circ} + a :: t : t\frac{(360 + a)}{360}$ = alla lunghezza ricercata del giorno solare. Ovvero così: sia $a =$ all' aumento dell' ascensione retta del Sole in 24 ore; la lunghezza del giorno solare si determinerà colla seguente proporzione, come $360^{\circ}.\ 59'.\ 8''$ a $360^{\circ} + a$ così 24^{h} a $24^{h}\ \frac{(360 + a)}{360^{\circ}.\ 59'.\ 8''}$ la lunghezza del giorno solare richiesta.

Cor. I. Quindi si conchiude, che i giorni solare, e medio non saranno mai eguali fuorchè quando l' incremento dell' ascensione retta del sole in 24. ore è $= 59'.\ 8''$.

Cor. II. Di qui è manifesto, che il tempo apparente del

giorno, dedotto dalla misura dell' angolo contenuto tra il meridiano ed un circolo di declinazione, che passa pel centro del sole, è comunemente diverso dal tempo vero o *equato*, siccome si scorge con un oriuolo ben regolato.

La differenza fra il tempo vero ed apparente chiamasi *equazione del tempo*: questa si calcola anticipatamente nelle Efemeridi Astronomiche per ciascun giorno dell' anno. Se noi determiniamo il tempo apparente dall' osservazione del sole, o delle stelle, il tempo vero si avrà con aggiugnere o sottrarre l' equazione corrispondente al tempo dell' osservazione.

4. L' anno tropico è il tempo trascorso tra la partenza del sole da uno de' tropici ed il suo ritorno allo stesso tropico.

L' anno tropico è composto di 365. giorni, 5. ore, e circa 49. minuti.

5. L' anno sidereo è il tempo trascorso tra la partenza del sole da una stella fissa qualunque nell' eclittica, ed il suo ritorno alla medesima stella.

L' anno sidereo consiste in 365. giorni, 6. ore, e circa 9. minuti.

Da questa differenza fra gli anni tropico, e sidereo si inferisce, che i punti equinoziali cangiano i loro luoghi

in Cielo, rivolgendosi in una direzione contraria all' ordine de' segni a ragione di 1° in 72 anni. Perciò i Coluri saranno soggetti allo stesso moto che i punti equinoziali, ed il polo dell' equatore descriverà un circolo minore intorno al polo dell' eclittica a 23°. 28′ di distanza da essa, e compirà il suo giro in $72 \times 360 = 25920$ anni.

6. L' anno solare non è composto d' alcun numero esatto di giorni.

Di qui nasce la necessità di applicare una frequente correzione al Calendario per fare, che le stagioni dell' anno non cessino di corrispondere coi luoghi del sole nell' eclittica contando dagli equinozj o dai tropici.

L' anno tropico è composto di 365. giorni, 5. ore, e 49. minuti; se in conseguenza si contassero solamente 365. giorni secondo il costume degli Egiziani, le 5. ore e 49. minuti mancanti si accumulerebbono in 4. anni ad una differenza di 23. ore, e 16. minuti, e di tanto il calendario precederebbe il sole; ma se per compenso di ciò si inserisce un intero giorno nel calendario ad ogni quarto anno, si ha 44. minuti di troppo, il che rende necessario di lasciar fuori un giorno in circa ogni anno centesimo.

CAPO XI.

DEL MOTO PROGRESSIVO DELLA LUCE.

1. QUando i satelliti di Giove emergono dall' ombra del loro primario, la luce da essi riflessa dopo il loro oscuramento osservasi arrivar sulla terra circa sedici minuti più presto allorchè Giove è in opposizione, che allorquando egli è in congiunzione.

Quindi si conchiude, che un raggio di luce trascorre l' orbita della terra in sedici minuti in circa, ovvero in nove cento e sessanta secondi di tempo, e conseguentemente si muove in ragione di $\frac{194000000}{960}$, ovvero di 202083 miglia in un secondo.

2. Le stelle fisse si vedono descrivere delle ellissi intorno ai loro luoghi veri come centri.

Il moto apparente nelle stelle fisse nasce dal moto

progreſſivo della luce, e dal moto della terra nella ſua orbita.

Gli aſſi più lunghi delle elliſſi ſono paralleli al piano dell'eclittica, e ſottendono angoli, che ſono tutti in circa eguali a 40″, e gli aſſi più corti = 40″ × ſin. latit. della ſtella.

La latitudine apparente di una ſtella è minima quando il ſole avanza di 90° la ſtella in longitudine.

La longitudine apparente è la maſſima allorchè la ſtella, ed il ſole differiſcono in longitudine di 180°, ed è la minima quando la longitudine del ſole e della ſtella ſono le ſteſſe.

3. La velocità della luce ſta alla velocità della terra nella ſua orbita, come il raggio alla tangente di 20″, ovvero come 10313 ad 1.

Queſta proporzione ſi deduce dalla teoria del Dottor Bradley dell' aberrazione delle ſtelle; dalle eccliſſi dei Satelliti di Giove ſi inferiſce, che la velocità della luce ſta a quella della terra nella ſua orbita come 202083 a 19,31, ovvero come 10465 ad 1: il vicino accordo di queſte proporzioni è una conferma del principio adottato per la ſpiegazione del fenonemo.

CAPO XII.

DELLE CAGIONI DEL MOTO DE' PIANETI.

1. I Pianeti primarj gravitano verſo il ſole, ed i pianeti ſecondarj verſo i loro primarj riſpettivi.

Venendo impreſſa ad un pianeta in quiete una forza projettile, queſta lo farebbe muovere per ſempre uniformemente in linea retta, ſe il ſole per l'azione continua della ſua forza attrattiva non torceſſe il pianeta dalla ſua direzione rettilinea. Queſta attrazione ſi chiama *forza centripeta*.

Le forze contripete variano colla diſtanza de' pianeti dal ſole, coſicchè un pianeta alla metà della diſtanza verrebbe attratto da una forza quadrupla, ad un terzo della diſtanza la forza di attrazione ſarebbe nove volte tanto grande.

2. I pianeti ſi aggirano in elliſſi pochiſſimo differenti da circoli intorno al comun centro di gravità de' pianeti e del ſole.

Il ſole nella quantità di materia ſupera i pianeti di tanto, che il centro di gravità del ſole, e di tutti i pianeti comunque ſituati è viciniſſimo al ſole iſteſſo.

Le aree deſcritte dalla linea, che congiugne un pianeta, ed il punto, a cui la forza centripeta è ſempre diretta, ſono proporzionali al tempo del moto del pianeta nella ſua orbita.

Alcune proprietà delle forze centrali poſſono dichiararſi colle eſperienze.

3. Suppoſto, che due corpi ſpinti dalle forze centripeta, e projettile deſcrivano de' circoli intorno ad un centro di forze ſituato nel centro comune de' circoli; ſe i tempi periodici ſono gli ſteſſi, le forze centripete o centrifughe ſono nella medeſima ragione de' raggj dei circoli.

4. Se i tempi periodici ſono direttamente come i raggj, le forze ſaranno inverſamente come i raggj.

5. Se i quadrati de' tempi periodici ſono come i cubi delle diſtanze, le forze centripete ſaranno inverſamente come i quadrati delle diſtanze.

Queſto caſo ha luogo nelle rivoluzioni de' pianeti e de' loro ſecondarj, colla ſola differenza che i pianeti ed

i loro secondarj fanno il loro giro in ellissi, laddove nell' esperimento i corpi si rivolgono in orbite circolari: ma le stesse proprietà si dimostrano, per ciò che riguarda l'esperienza, come nell'esempio precedente anche quando le orbite sono ellissi, con cangiare il raggio del circolo nel semiasse maggiore dell'ellisse.

6. La figura sferoidale della terra è prodotta dalla rivoluzione della terra intorno al suo asse.

La terra è una sferoide oblata, essendo un diametro equatorio maggiore del polare nella proporzione di 230: 229.

Da questa figura della terra, dall' inclinazione dell' eclittica all' equatore, e dall' attrazione del sole e della luna nasce la precessione degli equinozj.

7. La forza centrifuga della terra rivolgentesi intorno al comun centro di gravità della terra e della luna contribuisce ad accrescere la marea in quelle parti della terra, che sono le più lontane dalla luna.

8. Le irregolarità lunari sono prodotte dall' azione del sole sulla terra e la luna.

APPENDICE.

METODO DI COLLOCARE LO STROMENTO EQUATORIALE.

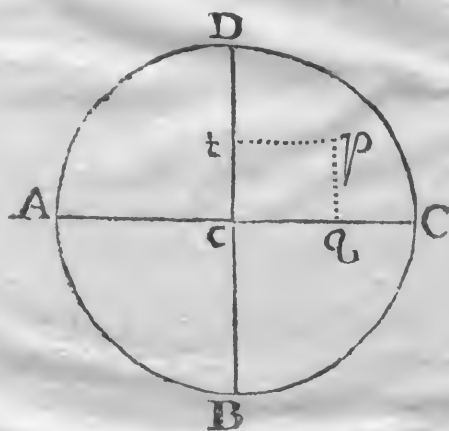



Fig. I.

I. RAppresenti il circolo *ABCD* il campo del telescopio: *c* il punto nel campo, pel qual punto passa la linea dì collimazione. Una linea *AC* che passa per *c* si faccia parallela al piano del circolo di declinazione, e si supponga *BD* tirata per *c* pendicolare ad *AC*.

2. Avendo posto il circolo di declinazione a 90° in un quadrante o nell'altro, si diriga il punto *c* ad un oggetto fisso distantissimo *p*, e si rivolga il circolo equatoriale nel suo proprio piano per 180°. Se *p* non coincide allora col punto *c*, si concepiscano le linee *pq*, *pt* condotte perpendicolarmente ad *AC*, e *BD* rispettivamente: si corregga la metà dell'errore *cq* con muovere il circolo di declinazione nel proprio piano, e la metà dell' errore *pq* con alterare l'inclinazione del circolo di declinazione al piano dell' equatoriale. Se il punto *c* si dirige ora all' oggetto distante *p*, ed il circolo equatoriale si fa girare 180° nel proprio piano, i punti *p*, e *c* coincideranno. Per un oggetto distantissimo s'intende qualunque punto visibile, la di cui distanza non è minore di 400000 volte la distanza perpendicolare della linea di collimazione dall' asse del circolo di declinazione.

3. Si adatti il nonio di declinazione a 90°, ed avendo fatto girare il circolo di declinazione per 180° nel proprio piano si diriga il punto *c* all' oggetto distante *p*, e si muova il circolo equatoriale nel proprio piano per 180°. Se ora *p* devia da *c* l'errore *cq* mostrerà doppio l' errore nella divisione del circolo di declinazione, e non potrà correggersi per via di collocazione. Suppongasi in conseguenza, che il punto *p* sia in qualche luogo della linea *BD*, e si corregga $\frac{1}{4}$ dell' errore *tc* alterando l'inclinazione del circolo di declinazione al piano dell'equatoriale, ed $\frac{1}{4}$

dello ſteſſo errore *tc* movendo la linea di collimazione perpendicolare al piano del circolo di declinazione.

Quando le precedenti collocazioni ſono corrette, egli è chiaro 1. Che la linea di collimazione è parallela al piano del circolo di declinazione. 2. Che il piano del circolo di declinazione è perpendicolare a quello dell'equatoriale. 3. Gli errori di diviſione, ſe ve ne ha, ne' due punti oppoſti del circolo di declinazione (cioè i due 90°) reſtano ſcoperti. 4. Quando il circolo di declinazione è meſſo ſu o, la linea di collimazione è parallela; e quando è poſto ſu 90°, in un quadrante qualunque, ella è perpendicolare al piano del circolo equatoriale.

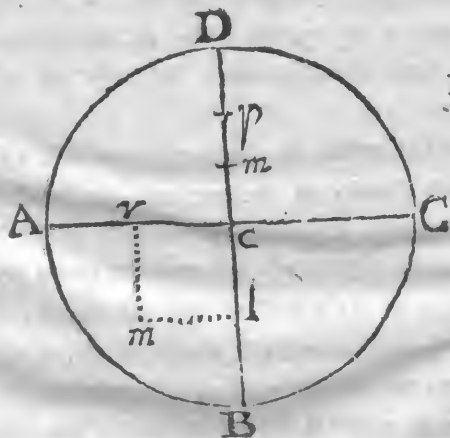



Fig. II.

4. Il circolo azimut eſſendo ridotto orizzontale, ſi faccia *AC* (fig. II.) parallela ad eſſo con far girare il circolo

equatoriale, e l'azimut ne' loro propri piani, ed avendo diretto il punto *c* ad un oggetto fiſſo diſtantiſſimo *p* giudicato eſſere nell'orizzonte o preſſo all'orrizzonte, ſi muovano l'azimut, e il circolo di declinazione ne' loro piani per 180° ciaſcuno, coſicchè il punto *p* appaja in qualche luogo della linea *DB*: ſe *p* devia da *c*, ſi tagli per mezzo *pc* in *m*, la linea di collimazione eſſendo diretta ad *m* ſarà orizzontale. Si marchi *m* ſull'orrizzonte.

5. Pongaſi il circolo di declinazione in o, e ſi faccia girare il circolo azimut nel ſuo piano per 90°, ſicchè l'oggetto orizzontale *m* ſi porti nella linea *B D*, e ſi diriga il punto *c* ad *m* con muovere il circolo equatoriale nel proprio piano ſe è neceſſario. Il piano del circolo di declinazione ſarà allora orizzontale, e quello del circolo equatoriale ſarà verticale.

6. Si facciano girare i circoli equatoriale, ed azimut ne' proprj piani per 180°. Se allora *m* devia da *c*, *mr* ſarà l'errore nella diviſione del circolo equatoriale, ed *ml* l'errore di diviſione nel circolo azimut.

7. Per innalzare il circolo equatoriale ſopra l'orrizzonte a qualunque propoſta inclinazione, pongaſi il circolo di declinazione (nel quadrante auſtrale) al propoſto angolo di elevazione, ed avendo portato XII. del circolo equatoriale al punto *o* ſull'indice, ſi diriga la linea di collimazione al punto orizzontale *m* con alterare l'inclinazione del circolo equatoriale all'orizzonte, e con far girare il circolo azimut nel ſuo piano.

8. Per aggiuſtare l'indice equatoriale, ſi metta al o il circolo di declinazione, e movendo il circolo equatoriale, e l'azimut ne' proprj piani ſi diriga la linea di collimazione al punto orizzontale *m*, e ſi metta l'indice equatoriale a VI.

9. Per mezzo di queſt'ultimo aggiuſtamento, quando l'indice equatoriale marca XII., il piano del circolo di declinazione coinciderà con un ſecondario comune ai circoli equatoriale ed azimut; conſeguentemente ſopra queſto ſecondario ſi miſurerà eſattamente l'inclinazione di que' circoli tra di ſe. Il ſettimo aggiuſtamento ſi può ripetere, ſe ſi crede neceſſario.

10. Se il teleſcopio ingrandiſce 60. volte, dai precedenti aggiuſtamenti ſi deduce, che ſi può ſcoprire qualunque inclinazione della linea di collimaziono, ovvero dell' aſſe equatoriale al piano del circolo di declinazione, ſe eſſa eccede 2″; ſi deduce ancora, che (ſe il livello, con cui ſi rettifica la poſizione del circolo azimut, è paſſabilmente buono) il punto *m* accennato nell' art. 6. è veramente orizzontale dentro 6″, o 8″.

Di qui può inferirſi, che quando il piano del circolo equatoriale coincide con quello dell' equatore celeſte, la linea di collimazione durante il moto giratorio del circolo di declinazione nel proprio piano paſſerà pel polo dell' equatore ſenza errore ſenſibile, e conſeguentemente deſcriverà un circolo di declinazione nel cielo: quando l'indice

equatoriale marca XII., la linea predetta descriverà un secondario comune all' equatore ed all' orizzonte, ovvero il meridiano del luogo, e in conseguenza passerà pel polo dell' equatore e pel zenit. L' istrumento equatoriale in questa posizione può adoprarsi come un telescopio dei passaggj.

Gli errori nella posizione del meridiano, e nel tempo dedotto dall' osservazione collo stromento equatoriale descritti, e calcolati nel Cap. *sopra l' uso dello stromento equatoriale* possono correggersi così: Il telescopio essendo di quella specie, che rappresenta l' immagine inversa per rispetto all' oggetto, ne segue, che l' elevazione apparente della stella prodotta dalla refrazione deprimerà l' immagine nel telescopio per uno spazio che sottende al centro dell' obbiettivo un angolo eguale alla refrazione della stella in altezza. Si supponga che *DB* (fig. II.) sia perpendicolare alla linea di collimazione, e sia aggiustata al piano di un circolo verticale che passa per una stella osservata: rappresenti *cl* la depressione dell' immagine della stella, la qual depressione si può determinare qualora sieno date la lunghezza focale principale del vetro obbiettivo, e la refrazione della stella in altezza: se *l* si dirige ora al luogo apparente della stella, egli è manifesto, che la linea di collimazione dello stromento, la qual congiugne il punto *c*, ed il centro dell' obbiettivo sarà diretta al luogo vero della stella, e conseguentemente saranno interamente tolti

gli effetti della refrazione sopra l' angolo orario e la posizione del meridiano.

Nel determinare le ascensioni rette, e le declinazioni delle comete, o stelle con uno stromento equatoriale perfettamente aggiustato alla latitudine, ed al meridiano, nascono degli errori considerabili dalla refrazione: Rappresenti $\dot{r}$ la refrazione in altezza, a l' ascensione retta, e d la declinazione di una stella. $\dot{a}$. e $\dot{d}$ le variazioni dell' ascensione retta, e della declinazione prodotte dalla refrazione. Innoltre sia s = all' angolo contenuto tra un circolo verticale, e il circolo di declinazione che passa per la stella; noi abbiamo dalle proprietà de' triangoli sferici $\dot{a} = \frac{\dot{r}\ \sin.\ s.}{\cos.\ d}$, e $\dot{d} = \dot{r}\ \cos.\ s$, posto il raggio 1.
Questi errori nel determinare le ascensioni rette e le declinazioni collo stromento equatoriale si correggono, come nel primo caso, nell' osservazione, se il punto c, per cui passa la linea di collimazione, si abbassa preventivamente in un piano verticale per uno spazio $c\ l$, che sottende al centro del vetro obbiettivo un angolo uguale alla refrazione della stella in altezza.

Questo è uno de' molti scientifici miglioramenti applicati alla costruzione dello stromento equatoriale dal Sig. Ramsden.

DISSERTAZIONE

DEL

P. D. GREGORIO FONTANA

SOPRA IL COMPUTO
DELL' ERRORE PROBABILE
NELLE SPERIENZE ED OSSERVAZIONI.

Unde tandem hoc ſingulare ſequi videtur, quod ſi eventuum omnium obſervationes per totam aeternitatem continuarentur (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & conſtanti viciſſitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maxime caſualibus atque fortuitis quandam quaſi neceſſitatem, &, ut ſic dicam, fatalitatem agnoſcere teneamur; quam neſcio annon ipſe jam Plato intendere voluerit, ſuo de univerſali rerum apocataſtaſi dogmate, ſecundum quod omnia poſt innumerabilium ſaeculorum decurſum in priſtinum reverſura ſtatum praedixit.

Jac. Bernoullius Art. Conject. Part. IV. Cap. V.

DISSERTAZIONE
DEL TRADUTTORE
SOPRA IL COMPUTO ANALITICO DELL' ERRORE PROBABILE NELLE SPERIENZE ED OSSERVAZIONI.

ὀυδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω

CHi avesse detto poco più d' un secolo fa, che applicata l' Algebra alla Geometria da *Cartesio*, l' una e l' altra alla Fisica da *Newton* sarebbe venuto un tempo, in cui l' Algebra stessa avrebbe regolato e soggiogato la cosa più irregolare e più indomabile di tutte, cioè la Fortuna, sarebbe certamente stato creduto un sognatore o un romanziere. Eppure questo tempo è venuto: L' Algebra da un secolo in qua, quasi non contenta di dominare la terra, i mari, ed il cielo, e tutta quanta è la corporea natura, ha fatto lo sforzo il più grande, e il volo il più ardito, e colla scorta de' suoi

simboli e delle ſue Curve ha penetrato nelle regioni incognite ed intentate delle Eventualità. Tutta l' immenſa ſchiera degli avvenimenti fortuiti, lè innumerabili combinazioni degli azzardi, de' giuochi di ſorte, tutto ciò in ſomma, che è ſoggetto all' impero della Fortuna, è oggimai divenuto patrimonio o conquiſta del Geometra. Quindi i più ſegnalati Matematici di queſta età invitati dai primi feliciſſimi paſſi fatti in queſta carriera dal famoſo Ollandeſe Criſtiano *Huyghens* quaſi coll' azione combinata di tutte le forze coſpiranti de' loro ingegni crearono ad onore eterno dell' umano intendimento quell' Arte mirabile, detta Arte di Congetturare, Dottrina della Sorte, Calcolo della Probabilità.

Ridotta in appreſſo queſt' Arte in un vero corpo di Scienza, e ſollevata al rango delle più nobili Matematiche Diſcipline non ſi è più confinata a miſurare in aſtratto la probabilità, o l' improbabilità d' un evento, il valore d'un' aſpettativa, la ſperanza d' un guadagno, il pericolo d' una perdita, ma diſcendendo al particolare, e ne' dettaglj avvolgendoſi della vita ſociale e domeſtica

ha ſaputo con inſigne artifizio ed induſtria compilare una ſpecie di Codice Matematico per regolare tutte le ſorti di ſtipulazioni e contratti, che dalla veriſimile durata della Vita dipendono, ed alla miſura di tal durata ſi appoggiano. Ha dunque definito anticipatamente i gradi della probabilità della Vita, e del pericolo della morte per tutte le età e condizioni degl' Individui; ha aſſegnato alla ſperanza da un lato, e al timore dall' altro il giuſto peſo e valore; ha miſurata la probabile continuazione di più vite conbinate in tutte le ipoteſi della loro diſuguaglianza; e colla famoſa Curva di Mortalità ha regolato tutto l' eventuale dell' umana caducità. E qui è appunto, dove queſta novella Analiſi vittorioſa di tutte le difficoltà ſembra aver tentata l' impreſa più grande e a prima viſta inacceſſibile a tutte le forze dell' Uomo, ſiccome è quella di fiſſar leggi e ſtabilir canoni intorno al periodo della vita, e in una coſa ſottratta provvidamente dalla Natura ad ogni ſguardo mortale, e ſepolta nelle tenebre dell' avvenire divenire in certo modo ſovrana e legislatrice.

Quindi non dee far meraviglia, ſe un' Arte

eotanto ſingolare, che aſſegna per dir così una miſura infallibile e certa alla ſteſſa incertezza, da un gran Geometra di queſta età ſia ſtata finanche introdotta ne' tortuoſi laberinti della Criminale Giuriſprudenza.

Recheremo di ciò un ſolo eſempio, onde poſſa farſi ragione degli altri: Trattaſi di ſcoprire l'innocenza, o la reità d'un Inquiſito: Militano contro di lui alcuni indizj, da ciaſcuno de' quali in particolare ſi rileva eſſere due volte più probabile la ſua innocenza che la reità, e cercaſi il valore o la miſura dell' innocenza, dato il numero degl' indizj. Egli è dimoſtrato ne' Canoni dell' Analiſi della Sorte, che una tal miſura decreſce ſempre in una geometrica proporzione, e s'agguaglia alla frazione $\frac{2}{3}$ innalzata alla poteſtà, che ha per eſponente il numero degl' indizj; talmente che nell' ipoteſi, che dieci ſolamente foſſero gl' indizj di tal natura, il valore dell' innocenza, di cui ſi va in traccia, ſarebbe $\frac{1024}{59049}$, che è quanto dire ſarebbe preſſo cinquanta ſette volte più probabile la reità che non l' innocenza del ſuppoſto Inqui-

ſito; propoſizione in apparenza paradoſſa ed aſſurda, e che ſarà ſempre acremente contraddetta da chiunque non è iniziato ne' miſterj di queſta novella Scienza, ma che non è per queſto meno vera, o meno rigoroſamente dimoſtrata. Sebbene, come mai luſingarſi, che lo ſtudio dell' Algebra, e dell' Algebra la più ſpinoſa, poſſa giammai regolare la Criminale Proceſſura? Sarebbe queſta una di quelle rivoluzioni, che fanno cangiar la faccia delle coſe, e che forſe nel lungo periodo de' ſecoli la marcia lenta e tranquilla, ma ferma e immutabile della Filoſofia potrebbe avventuroſamente partorire.

Ma checchè ſia degli uſi varj e moltiplici, che aver poſſa la Dottrina degli Azzardi anche in quelle Facoltà, che non ſono compreſe nella claſſe delle Filoſofiche Diſcipline, e laſciando per ora tutto ciò da parte, io qui mi propongo di brevemente moſtrare l'applicazione di queſta Teoria della Sorte a quelle fiſiche o matematiche ricerche, che dipendendo da un certo numero di analoghe oſſervazioni o eſperienze ſono ſempre affette da un errore più o meno picciolo, qual è

appunto quello che dal compleſſo delle ſperienze riſulta, e che all' umana induſtria è onninamente inevitabile. Nelle grandi operazioni della Geodeſia trattaſi per eſempio di dover miſurare una Baſe, a cui ſi appoggia tutto il calcolo di quella ſerie di triangoli, che è l' oggetto principale dell' operazione geodetica: Suppongo, che ad ogni applicazione della pertica ſulla data Baſe, che ſarà ſe vuolſi di mille pertiche, ſia inevitabile un errore d' una linea o per eccеſſo, o per difetto promiſcuamente. Dovendoſi pertanto per ben mille volte ripetere l' applicazione della pertica ſulla propoſta Baſe, e però potendoſi in tanti e sì ſvariati modi combinare gli errori eccеſſivi e difettivi di una linea in queſt' operazione mille volte replicata, naſce quindi l' intereſſante quiſtione, come debba calcolarſi l' errore *veriſimile* o *probabile*, che in tutta quella miſura ſi commetterà; ſicchè poſſa con verità pronunciarſi, che l' error totale di quelle mila oſſervazioni o eſperienze non giugne *probabilmente* ſe non a tanto. Il noſtro Autore nel Capo III. della VI. Sezione ha dato di ciò alcun cenno: Io ripeterò qui la coſa da' ſuoi veri principj. Sia dunque

TEOR. I.

La ſomma de' coefficienti di tutti i termini, di cui ſi compone la poteſtà n d'un binomio $a + b$, è uguale alla ſteſſa poteſtà n del numero 2.

DIM.

Spiegata ne' ſuoi termini la poteſtà $(a + b)^n$, ſi ottiene $a^n + na^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} a^{n-3} b^3 +$ ec.; epperò la ſomma de' coefficienti di tutti i termini è $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} +$ ec., la quale viſibilmente non è altro che $(1+1)^n$, ovvero 2^n. Il che ec.

TEOR. II.

La ſomma de' coefficienti di tutti i termini, de' quali è compoſta la poteſtà n d'un trinomio $a + b + c$, è uguale alla ſteſſa poteſtà n del numero 3.

DIM.

L'evoluzione ordinaria delle poteſtà dà $(a+b+c)^n$

$= (a+b)^n + n(a+b)^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{2} \times (a+b)^{n-2}c^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ \ 3}(a+b)^{n-3}c^3$ + ec. Ora nelle poteſtà $(a+b)^n$, $(a+b)^{n-1}$, $(a+b)^{n-2}$ ec. eſſendo (Teor. 1.) la ſomma de' coefficienti de' termini riſpettivamente uguale a 2^n, 2^{n-1}, 2^{n-2}, 2^{n-3}, ec. ne viene in conſeguenza, che nel trinomio $a+b+c$, ſpiegato nella ſua potenza n, la ſomma de' coefficienti di tutti i ſuoi termini ſarà $2^n + n.\, 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ \ 3} 2^{n-3}$ + ec., cioè evidentemente $(2+1)^n$, ovvero 3^n. Il che era ec.

TEOR. III.

Spiegato un polinomio qualunque $a+b+c+d+e+$ ec. nella poteſtà n, la ſomma de' coefficienti di tutti i termini della detta poteſtà è uguale alla medeſima poteſtà n del numero p compoſto di tante unità, quante ſono le parti del polinomio.

DIM.

E' chiaro abbaſtanza, che il Teorema può

dimoſtrarſi collo ſteſſo metodo del precedente; ma ſi può recarne una dimoſtrazione propria ed univerſale così:

Soſtituiſcaſi l'unità in ciaſcun termine del polinomio $a+b+c+d+e+$ ec., onde abbiaſi $1+1+1+1+1+$ ec., ed è manifeſto, che tanto nella potenza $(a+b+c+d+e+\text{ec.})^n$, quanto nella potenza $(1+1+1+1+1+\text{ec.})^n$ la ſomma de' coefficienti di tutti i riſpettivi termini ſarà la medeſima, e che oltracciò la detta ſomma non ſarà altro, che la potenza ſteſſa $(1+1+1+1+1+\text{ec.})^n$, ovvero p^n. Il che ec.

SCOLIO.

Non occorre avvertire, che ſe il polinomio ſarà compoſto di parti altre poſitive, ed altre negative, la ſomma di tutti i coefficienti del medeſimo elevato alla poteſtà n ſi agguaglierà alla poteſtà medeſima n del numero $\pm q$ compoſto di tante unità, quanto è l'eccesſo, onde il numero delle parti poſitive del polinomio ſupera il numero delle negative, oppure queſte ſuperano quelle.

TEOR. IV.

Nella poteſtà pari n del binomio $a+b$, il

coefficiente del termine di mezzo, cioè il maſſimo moltiplicato per l'eſponente n della poteſtà, è uguale alla ſomma de' prodotti, che riſultano dal moltiplicare il coefficiente di ciaſcun termine della detta poteſtà per la differenza degli eſponenti delle due parti del binomio in quel termine.

DIM.

Dalla legge, con cui progrediſcono i coefficienti del binomio potenziato, ſi raccoglie il coefficiente medio ovvero maſſimo

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\left(\frac{n+4}{2}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\ \ldots\ldots\left(\frac{n-2}{2}\right)\ \frac{n}{2}},$$

il quale moltiplicato per l'esponente n della poteſtà diventa

$$(A)\ \frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\left(\frac{n+4}{2}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\ \ldots\ldots\left(\frac{n-2}{2}\right)}.$$

Ora egli è manifeſto, che ſpiegata la potenza $(a+b)^n$ in tutte le ſue parti, la ſomma de' prodotti, che ſi hanno con moltiplicare il coefficiente di ciaſcun termine di detta potenza per la differenza degli eſponenti di a, e b in quel termine

non è altro che il doppio della quantità $1 \times n$ $+ n \times (n-2) + \frac{n(n-1)}{2} \times (n-4) +$ $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} \times (n-6)$ . . . . +

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\left(\frac{n+4}{2}\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ldots\ldots\left(\frac{n-2}{2}\right)} \times 2,$$

nella quale i fattori prepoſti al ſegno × ſono i coefficienti, ed i poſpoſti ſono le differenze dei due eſponenti, e ciaſcun prodotto di tal quantità dee prenderſi due volte, perchè oltrepaſſato il termine medio della poteſtà, nel quale il prodotto è zero, ricorrono con ordine retrogrado tutti i prodotti di prima. Ridotti pertanto i termini della predetta quantità ad un ſolo, ſi ottiene $\frac{n(n-1)}{1.\ 2.} \times$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.\ 4.\ 5.} \ldots\ldots \frac{\left(\frac{n+4}{2}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\left(\frac{n-2}{2}\right)},$$

e queſto duplicato dà appunto (A). Il che era ec.

TEOR. V.

Diſpiegata la poteſtà diſpari n del binomio $a+b$ in tutti i ſuoi termini, la ſomma de' prodotti, che naſcono dal moltiplicare il coefficiente

di ciascun termine per la differenza degli esponenti di a, e b in quel termine, è la metà del prodotto del coefficiente medio o massimo della potestà susseguente pari $n+1$ del binomio per lo stesso esponente $n+1$.

DIM.

La legge del binomio dà pel coefficiente medio della potestà pari $n+1$ la formola

$$\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots\left(\frac{n+5}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\ldots\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

che moltiplicata per l'esponente $n+1$ produce la quantità

$$(B)\ \frac{2(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\left(\frac{n+5}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6.\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Fatta pertanto l'evoluzione della potestà dispari n del binomio $a+b$, sarà facile il riconoscere, che la somma de' prodotti di ciascun coefficiente per la differenza degli esponenti di a, e b per cadaun termine fino al termine $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{esimo}}$ *inclusive* non è altro che (D) $1\times n+n\times(n-2)+\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\times(n-4)$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}\times(n-6)\ldots\ldots+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\left(\frac{n+5}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\times 1,$$

e dopo il termine $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{esimo}}$; ricorrono con ordine retrogrado gli stessi prodotti di prima. Quindi, duplicata l'espressione (D), e convertita in un sol prodotto indefinito, si ricava

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\left(\frac{n+5}{2}\right)\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

per la somma di tutti i prodotti de' coefficienti di ciascun termine del binomio potenziato per le rispettive differenze degli esponenti indicati; e quest' ultima espressione è visibilmente la metà di (B). Il che era ec.

Corol. I. Chiamando $\int$ la somma de' mentovati prodotti nella potenza dispari n del binomio, ed M' il coefficiente medio della potenza pari, susseguente $n+1$, si ha l' ugualtà

$$\frac{\int}{2^n}=\frac{(n+1)M'}{2^{n+1}}$$

Corol. II. Confrontando nella dimostrazione di questo Teorema l'espressione del coefficiente medio della potestà pari $n + 1$ col coefficiente del termine $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{esimo}}$ della potestà dispari n, si vede, che il coefficiente massimo di una potestà pari qualunque è sempre doppio del coefficiente del termine $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{esimo}}$ della potestà dispari n precedente, ovvero è uguale alla somma dei due coefficienti medj della dispari antecedente.

Da questi Teoremi si ricava una regola molto comoda e spedita per ritrovare la somma probabile degli errori delle osservazioni ed esperienze sotto certe date circostanze. Sia pertanto il

PROBLEMA

Dato un numero n di esperienze ed osservazioni, in ciascuna delle quali si commette indifferentemente un errore costante p di eccesso, o un errore uguale q di difetto; ritrovare l'error probabile, che risulterà in fine delle dette esperienze.

SOL.

Innalzato il binomio $p + q$ alla potestà n, e

fattane l' ordinaria evoluzione $p^n + n\,p^{n-1}q$ $+ \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\quad 3.} p^{n-3} q^3$ $+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\quad 3.\quad 4.} p^{n-4} q^4 +$ ec. egli è chiaro dai noti principj della dottrina degli Azzardi, che la ſomma de' coefficienti di tutti i termini della poteſtà rappreſenta il numero di tutti i caſi, ne' quali i due errori uguali ed oppoſti p, e q poſſono inſieme combinarſi in un numero n di eſperimenti; epperò (Teor. 1.) 2^n ſarà il numero di tutti queſti caſi poſſibili. Innoltre è noto egualmente, che il coefficiente di qualunque dato termine della detta poteſtà indica il numero de' caſi, ne' quali i due errori p, e q poſſono combinarſi nel modo che indicano i loro riſpettivi eſponenti in quel termine, così per eſ. il coefficiente $\frac{n(n-1)}{2}$ del terzo termine $\frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2$ indica il numero de' caſi, ne' quali $n-2$ errori poſitivi p poſſono combinarſi con 2 errori negativi q, ovvero (nella noſtra ipoteſi di p, e q uguali e contrarj) il numero de' caſi, in cui poſſono accadere $n-4$

errori eccesivi p, cioè tanti errori eccessivi quanta è la differenza dei due esponenti di p, e q; e così alternativamente tanti errori defettivi q (quando l'esponente di q incomincia a superare quello di p), quanta è la differenza degli esponenti. Se ora pel gran principio dell' Analisi della sorte si moltiplica ciascuna aberrazione np, $(n-2)p$, $(n-4)p$, $(n-6)p$, ec. pel rispettivo numero de' casi, che la rendono contingibile, e si divide la somma di tutti questi prodotti pel numero di tutti i casi possibili, ovvero (che è lo stesso) se l'errore p assunto come eccessivo o difettivo si moltiplica per la somma de' prodotti, che risultano dal moltiplicare il coefficiente di ciascun termine della potestà n del binomio $p+q$ per la differenza degli esponenti di p, e q in quel termine, e si divide la somma di siffatti prodotti per 2^n, si ottiene l'errore probabile, che qui si cerca. Ma si è dimostrato (Teor. IV.), che essendo n numero pari, la predetta somma è uguale al coefficiente medio M di quella potestà moltiplicato per l'esponente n della medesima. Dunque nell' ipotesi di n pari l'errore probabile è $\frac{nMp}{2^n}$. Se poi n è dis-

parì, la mentovata ſomma è uguale (Teor. V.) alla metà del coefficiente maſſimo M' della poteſtà pari ſuſſeguente moltiplicato per l' eſponente di lei $n+1$; onde l' errore probabile nell' ipoteſi di n diſpari è $= \frac{\frac{1}{2}(n+1)M'p}{2^n} = \frac{(n+1)M'p}{2^{n+1}}$. Il che ec.

Corol. Di qui ſi ricavano le due ſeguenti Regole per calcolare la ſomma probabile degli errori, che ſi commettono nell' oſſervare, o ſperimentare.

REGOLA I.

» Dato un numero pari n di ſperimenti, in » ciaſcuno de' quali ſi commette ſempre lo ſteſſo » errore per eceſſo o per difetto indifferentemen» te, ſi ha l' errore probabile pel riſultato di tut» ti gli ſperimenti con moltiplicare l' errore co» ſtante pel coefficiente maſſimo d' un binomio » $a+b$ innalzato alla potenza n, e per lo ſteſſo » eſponente n, e dividerlo per la poteſtà medeſi» ma n del numero 2. »

REGOLA II.

» Per un numero diſpari qualunque n di

» esperimenti, in ciascuno de' quali può commet-
» tersi un errore sempre uguale o per eccesso, o
» per difetto indifferentemente, ritrovasi l' errore
» totale probabile, moltiplicando l'errore costan-
» te pel coefficiente massimo del binomio $a+b$
» portato alla potestà pari susseguente $n+1$, e
» per l' esponente stesso $n+1$, e dividendo il
» prodotto per la potestà medesima $n+1$ del
» numero binario, »

Quì per altro è da osservarsi, che dove il numero n degli sperimenti sia molto grande, il calcolo, che a norma di queste due Regole conviene intraprendere, riesce lungo e tedioso, e capace in alcuni casi di stancar la pazienza del più agguerrito Calcolatore. Quindi è, che in tali circostanze, che possono occorrere assai di frequente, sarà comodissimo l' aver in pronto una formola, la quale se non con tutta l' esattezza geometrica, che nelle cose fisiche è superflua, somministri con fisica accuratezza, cioè con una sufficiente approssimazione la quantità dell' error probabile, che si addimanda. Egli è noto pertanto, che *Moivre* ne' *Miscellanei Analitici*, e nella *Dottrina della Sorte*, *Stir-*

ling nel Trattato della *ſomma*, e *Interpolazione delle ſerie Infinite*, *Maclaurin* nel Trattato delle *Fluſſioni*, il Signor *Euler* nel *Calcolo Differenziale* hanno ritrovato, che qualora ſia n un numero grandiſſimo nel binomio $(a+b)^n$, la ragione del coefficiente maſſimo alla ſomma di tutti i coefficienti viene proſſimamente rappreſentata dall' eſpreſſione $\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$, nella quale π denota la ſemicirconferenza d'un cerchio deſcritto col raggio 1. Siccome ora un tal rapporto deve moltiplicarſi, ſecondo la Regola eſpoſta, per pn ad effetto di ottenere l' error probabile ricercato, perciò la formola $pn\sqrt{\frac{2}{n\pi}} = p\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ ſomminiſtrerà proſſimamente un tal errore, avendo il ſolito riguardo di prendere per n il numero pari ſuſſeguente $n+1$, quando n è diſpari. Che ſe l' eſpreſſione $\sqrt{\frac{2}{n\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n\pi}}$ del rapporto del coefficiente maſſimo alla ſomma di tutti i coefficienti del binomio dà queſto rapporto eſtremamente approſſimante quando n è eſtremamente grande, non laſcia però di darlo con tollerabile ap-

proſſimazione anche quando n non è tanto grande. Prendo per es. $n=12$ ſolamente, e ſacendo il calcolo,

$$\begin{aligned} log.\ \tfrac{1}{2}\pi &= 0,1961198 \\ log.\ n &= 1,0791812 \\ log.\ \tfrac{1}{2}n\pi &= 1,2753010 \\ \tfrac{1}{2}\ log.\ \tfrac{1}{2}n\pi &= 0,6376505 \\ log.\ \frac{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2}n\pi}} &= -0,6376505 \end{aligned}$$

ſi ritrova, che al logaritmo $-0,6376505$ corriſponde il numero $\frac{2303}{10000} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n\pi}}$. Cercando ora il predetto rapporto eſatto ſi trova $\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6\times 2^{12}}$ $= \frac{924}{4096} = \frac{231}{1024}$; dal che è viſibile, che la differenza tra il valor approſſimante $\frac{2303}{10000}$, e il valor eſatto è picciolíſſima.

Ma trattandoſi di coſa, che intereſſa sì davvicino l'Arte di oſſervare e ſperimentare, ſtimo pregio dell'Opera di qui rintracciare un'altra formola, la quale con molto maggior approſſimazio-

ne della precedente eſprima la quantità probabile dell' errore, che ſi commette in un dato numero di ſperimenti, non ſolo allorchè tal numero è grandiſſimo, ma eziandio quando è mediocre, purchè non picciolíſſimo. A tal oggetto premetto il ſeguente curioſo, ed utiliſſimo Lemma.

LEMMA.

La formola (A) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(\frac{1}{2}n+1)}{1.2.3.4.\ldots\ldots\frac{1}{2}n}\times\frac{1}{2^n}$, la quale rappreſenta il rapporto, che il coefficiente maſſimo del binomio portato alla poteſtà pari n ha alla ſomma di tutti i coefficienti, ſi trasforma mercè le debite ſoſtituzioni in queſt' altra più ſpedita e ſemplice (B) $\frac{1.3.5.7.9.\ldots\ldots(n-1)}{2.4.6.8.10.\ldots\ldots n}$

DIM.

Se ſi moltiplica il numeratore della formola (A) pel prodotto indefinito $\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}n-1)(\frac{1}{2}n-2)\times(\frac{1}{2}n-3)\ldots\ldots 4.3.2.1$, e il denominatore per lo ſteſſo prodotto, ma in ordine retrogrado $1.2.3.4\ldots(\frac{1}{2}n-3)(\frac{1}{2}n-2)(\frac{1}{2}n-1)\frac{1}{2}n$, ne riſulta (A) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(\frac{1}{2}n+1)}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4\ldots\ldots\frac{1}{2}n}\times$

$$\frac{\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}n-1)(\frac{1}{2}n-2)(\frac{1}{2}n-3)\ldots 4.\quad 3.\quad 2.\quad 1}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ldots(\frac{1}{2}n-3)(\frac{1}{2}n-2)(\frac{1}{2}n-1)\frac{1}{2}n}\times\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9\ldots\ldots n}{1.2.3.4\ldots\frac{1}{2}n\times 1.2.3.4\ldots\ldots\frac{1}{2}n}\times\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots n}{2.4.6.8\ldots n\times 2.4.6.8\ldots\ldots n}$$

$$=\frac{1.3.5.7.9\ldots\ldots(n-1)}{2.4.6.8.10\ldots\ldots n}=(A).$$ Il che ec.

SCOLIO I.

Da questo Lemma si deduce con estrema facilità e speditezza, per rappresentare prossimamente il suddetto rapporto nel caso dell' esponente grandissimo, l' espressione $\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$, la quale da *Moivre*, *Stirling*, *Maclaurin*, ed *Euler* viene operosamente dimostrata dopo un lungo circuito di sussidiarie proposizioni. In fatti per la notissima serie di *Wallis* a denotare la semicirconferenza del cerchio si fa essere 2. $\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10\ldots(n-2).(n-2).n}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11\ldots(n-1).(n-1)}=\pi$, ed

estratta la radice quadrata $\frac{2.4.6.8.9\ldots(n-2)\sqrt{2n}}{3.5.7.9.11\ldots(n-1)}=\sqrt{\pi}$,

e quindi $\frac{3.5.7.9.11 \ldots\ldots\ldots (n-1)}{2.4.6.8.10 \ldots\ldots\ldots (n-2)} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$;

onde finalmente dividendo per n risulta $\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$

$= \frac{3.5.7.9.11 \ldots\ldots (n-1)}{2.4.6.8.10 \ldots\ldots (n-2)n}$, che è appunto, come si è fatto vedere, l' espressione del rapporto del coefficiente massimo del binomio alla somma di tutti i coefficienti, il qual rapporto tanto più esattamente verrà rappresentato dalla quantità $\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$, quanto più grande sarà l' esponente n, attesocchè dal valore più o meno grande di n dipende il valore più o meno accurato della semicirconferenza del cerchio.

SCOLIO II.

Siccome la bella serie Wallisiana sopra mentovata si trova presso pochi Autori dimostrata, stimo qui non inutile il darne una dimostrazione affatto nuova, e per avventura più semplice delle altre da me vedute. Io procedo adunque così:

E' noto dal Calcolo Infinitesimale, che preso x per esprimere un arco di cerchio descritto col raggio 1. si trova $sin.\ x = \int dx\ cos.\ x$

$= \int dx \sqrt{(1 - \sin. x^2)}$. Risolvo in serie il radicale $\sqrt{(1 - \sin. x^2)}$, ed ottengo $\sqrt{(1 - \sin. x^2)}$

$$= 1 - \frac{\sin. x^2}{2} - \frac{\sin. x^4}{2.2.2} - \frac{\sin. x^6}{2.2.2.2}$$

$$- \frac{5 \sin. x^8}{2.2.2.2.2.4} - \frac{7 \sin. x^{10}}{2.2.2.2.2.2.4}$$

$$- \frac{7.9. \sin. x^{12}}{2.2.2.2.2.2.2.4.6} - \frac{9.11. \sin. x^{14}}{2.2.2.2.2.2.2.2.4.6}$$

$$- \frac{9.11.13. \sin. x^{16}}{2.2.2.2.2.2.2.2.2.4.6.8}$$

$$- \frac{11.13.15. \sin. x^{18}}{2.2.2.2.2.2.2.2.2.2.4.6.8} - \&c.$$

Moco ora ciascun termine di questa serie per dx, e ne cerco l'integrale. Le regole fondamentali del Calcolo Integrale mi somministrano i seguenti risultati:

I.

$$\int dx = x$$

II.

$$\int dx \sin. x^2 = - \tfrac{1}{2} \cos. x \sin. x + \tfrac{1}{2} x;$$

$$- \tfrac{1}{2} \int dx \sin. x^2 = \frac{\cos. x \sin. x}{2.2} - \frac{x}{2.2}$$

III.

$$\int dx\, \sin. x^4 = -\tfrac{1}{4} \cos. x \sin. x^3 - \frac{3 \cos. x \sin. x}{2.\ 4} + \frac{3x}{2.4};$$

$$-\frac{1}{2.2.2} \int dx\, \sin. x^4 = \frac{\cos. x \sin. x^3}{2.2.2.4} + \frac{3 \cos. x \sin. x}{2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 4} - \frac{3x}{2.2.2.2.4}$$

IV.

$$\int dx\, \sin. x^6 = -\tfrac{1}{6} \cos. x \sin. x^5 - \frac{5 \cos. x \sin. x^3}{4.\ 6.} - \frac{5.3 \cos. x \sin. x}{2.\ 4.\ 6} + \frac{5.\ 3\ x}{2.\ 4.\ 6};$$

$$-\frac{1}{2.2.2.2} \int dx \sin. x^6 = \frac{\cos. x \sin. x^5}{2.2.2.2.6} + \frac{5 \cos. x \sin. x^3}{2.2.2.2.4.6} + \frac{5.3 \cos. x \sin. x}{2.2.2.2.2.4.6} - \frac{5.\ 3.\ x}{2.2.2.2.2.4.6}.$$

V.

$$\int dx\, \sin. x^8 = -\tfrac{1}{8} \cos. x \sin. x^7 - \frac{7 \cos. x \sin. x^5}{6.\ 8} - \frac{7.5 \cos. x \sin. x^3}{8.\ 6.\ 4} - \frac{7.5.3 \cos. x \sin. x}{8.\ 6.\ 4.\ 2}$$

$$+\frac{7.\ 5.\ 3.\ x}{8.\ 6.\ 4.\ 2};$$

$$-\frac{5}{2.2.2.2.2.4}\int dx\,\sin.\,x^{8}$$

$$=\frac{5\cos.x\,\sin.x^{7}}{2.2.2.2.2.4.8}+\frac{7.\ 5.\ \cos.x\,\sin.x^{5}}{2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2.\ 4.\ 6.\ 8}$$

$$+\frac{5.\ 5.\ 7\cos.x\,\sin.x^{3}}{2.2.2.2.2.4.4.6.\ 8}+\frac{7.5.5.3.\cos.x\,\sin.x}{2.2.2.2.2.2.4.4.6.8}$$

$$-\frac{7.\ 5.\ 5.\ 3\ x}{2.2.2.2.2.2.4.4.6.8}$$

VI.

&c.

Pigliando ora la ſomma di tutti queſti termini, e chiamando A il coefficiente di $\cos.x\,\sin.x$, B il coefficiente di $\cos.\,x\,\sin.\,x^{3}$, C quello di $\cos.\,x\,\sin.\,x^{5}$, D quello di $\cos.\,x\,\sin.\,x^{7}$, e così in ſeguito, ſi ritrova per fine $\sin.x=\int dx\cos.x$ $=\int dx\sqrt{(1-\sin.x^{2})}=A\cos.\,x\,\sin.\,x+B\cos.\,x\,\sin.x^{3}+C\cos.x\,\sin.x^{5}+D\cos.\,x\,\sin.x^{7}$ $+\ \&c.\ \ldots\ldots+\left(1-\frac{1}{2.\ 2}-\frac{3}{2.2.4.4}\right.$ $\left.-\frac{3.\ 3.\ 5}{2.2.4.4.6.6}-\frac{3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7}{2.2.4.4.6.6.8.8}-\&c.\right)x.$

Se in queſta equazione ſi fa x uguale al qua-

drante, cioè $\frac{1}{2}\pi$, diventa $\sin. x = 1$, $\cos. x = 0$, e l'equazione si trasforma in quest' altra

$$1 = \left(1 - \frac{1}{2.2} - \frac{3}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5}{2.2.4.4.6.6} - \frac{3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c.\right) \frac{1}{2}\pi,$$

ovvero $2 =$

$$\left(1 - \frac{1}{2.2} - \frac{3}{2.2.4.4} - \frac{3.3.5}{2.2.4.4.6.6} - \frac{3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8} - \&c.\right)\pi.$$

Osservo, che in questa ugualtà i primi due termini del fattore del secondo membro cioè $1 - \frac{1}{2.2}$ sono $= \frac{3}{2.2}$, e da questo sottraendo il terzo termine $\frac{3}{2.2.4.4}$, nasce $\frac{3}{2.2} - \frac{3}{2.2.4.4} = \frac{3(4^2 - 1)}{2.2.4.4} = \frac{3(4+1)(4-1)}{2.2.4.4}$ $= \frac{3.3.5}{2.2.4.4}$. Da questo tolgo di nuovo il termine quarto $\frac{3.3.5}{2.2.4.4.6.6}$, e ritraggo $\frac{3.3.5(6^2 - 1)}{2.2.4.4.6.6}$ $= \frac{3.3.5(6+1)(6-1)}{2.2.4.4.6.6} = \frac{3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6}$. Anche da questo seguito a levare il quinto termine

$\frac{3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8}$, ed ottengo $\frac{3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6}$ $- \frac{3.3.5.5.7}{2.2.4.4.6.6.8.8} = \frac{3.3.5.5.7\,(8^2-1)}{2.\,2.\,4.\,4.\,6.\,6.\,8.\,8} =$ $\frac{3.3.5.5.7.(8+1)(8-1)}{2.\,2.\,4.\,4.\,6.\,6.\,8.\,8} = \frac{3.3.5.5.7.7.9}{2.2.4.4.6.6.8.8}$; E così sottraendo da questo il termine susseguente si troverebbe $\frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9\,11}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10}$. Laonde si avrà finalmente $2 = \pi\,\frac{1.1.3.3.5.5.7.7.9}{2.2.4.4.6.6.8.8}$ &c.; e quindi $\pi = 2.\,\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.}{1.1.3.3.5.5.7.7.9.9}$ &c. che è appunto la serie Wallisiana proposta, la quale rappresenta la semicirconferenza del cerchio descritto col raggio 1 pel doppio prodotto de' quadrati di tutti i numeri pari diviso pel prodotto de' quadrati di tutti i dispari; teorema elegantissimo della moderna Geometria.

SCOLIO III.

Se si trattasse di ritrovare il coefficiente del termine $(p+1)^{esimo}$ del binomio innalzato alla poenza x, nel supposto che x, e p siano numeri

grandissimi, converrà ragionare nel seguente modo:

S' incomincia prima a cercare il logaritmo iperbolico di $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\ldots 3.2.1$, essendo x un numero intero qualunque. Ora si sa, che

$$log.\left(\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x-2}\cdot\frac{x}{x-3}\ldots\right)=log.\frac{x}{x-1}$$

$$+log.\frac{x}{x-2}+log.\frac{x}{x-3}+\&c.=-log.\frac{x-1}{x}$$

$$-log.\frac{x-2}{x}-log.\frac{x-3}{x}-\&c.=-log.\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$-log.\left(1-\frac{2}{x}\right)-log.\left(1-\frac{3}{x}\right)-\&c.$$ E la proprietà de' logaritmi iperbolici somministra le seguenti serie

$$-log.\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}+\&c.$$

$$-log.\left(1-\frac{2}{x}\right)=\frac{2}{x}+\frac{4}{2x^2}+\frac{8}{3x^3}+\frac{16}{4x^4}+\&c.$$

$$-log.\left(1-\frac{3}{x}\right)=\frac{3}{x}+\frac{9}{2x^2}+\frac{27}{3x^3}+\frac{81}{4x^4}+\&c.$$

$$-log.\left(1-\frac{4}{x}\right)=\frac{4}{x}+\frac{16}{2x^2}+\frac{64}{3x^3}+\frac{256}{4x^4}+\&c.$$

. . . .

. . . . :

le quali possono rappresentarsi sotto quest' altra forma

$$\frac{1}{x}\left(1+2+3+4+5+\ldots\ldots+m-1\right)$$

$$+\frac{1}{2x^2}\left(1+4+9+16+25+\ldots(m-1)^2\right)$$

$$+\frac{1}{3x^3}\left(1+8+27+64+125+\ldots+(m-1)^3\right)$$

$$+\frac{1}{4x^4}\left(1+16+81+256+625+\ldots+(m-1)^4\right)$$

. . . .

. . . .

Ridotte le serie a questa forma, io prendo per le regole note la somma di ciascheduna, ed ottengo i seguenti risultati

$$\frac{1}{x}\left(\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{x-1}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2x^2}\left(\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{x-1}{6}\right)$$

$$+\frac{1}{3x^3}\left(\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^3}{2}+\frac{(x-1)^2}{4}\right)$$

$$+\frac{1}{4x^4}\left(\frac{(x-1)^5}{5}+\frac{(x-1)^4}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{x-1}{30}\right)$$

. . . .

. . . .

Questi presentati sotto altra forma con ridurre in linee orizzontali le colonne verticali somministrano le serie qui appresso

$$x\left(\frac{(x-1)^2}{1.2x^2}+\frac{(x-1)^3}{2.3.x^3}+\frac{(x-1)^4}{3.4x^4}+\frac{(x-1)^5}{4.5x^5}+\&c.\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\&c.\right)$$

$$+\frac{1}{2.6x}\left(\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{x^2}+\frac{(x-1)^3}{x^3}+\frac{(x-1)^4}{x^4}+\&c.\right)$$

$$-\frac{1}{3.4.30x^3}\left(\frac{3(x-1)}{x}+\frac{6(x-1)^2}{x^2}+\frac{10(x-1)^3}{x^3}+\&c.\right)$$

$$+\frac{1}{5.6.42x^5}\left(\frac{5(x-1)}{x}+\frac{15(x-1)^2}{x^2}+\frac{35(x-1)^3}{x^3}+\&c.\right)$$

$$-\frac{5}{7.8.66x^7}\left(\frac{7(x-1)}{x}+\frac{28(x-1)^2}{x^2}+\frac{84(x-1)^3}{x^3}+\&c.\right)$$

. . . .

. . . .

Per formare queste serie osservo, che $-log.(1-z)$

$=log.\frac{1}{1-z}=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\&c.$, e

moltiplicando per $z-1$, nasce $(z-1).\times$

$\times \; log. \frac{1}{1-z} = -z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{3.4}$

$+ \frac{z^5}{4.5} +$ &c., ovvero $z + (z-1) \, log. \frac{1}{1-z}$

$= \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^5}{4.5} +$ &c. Quindi

posto $z = \frac{x-1}{x}$, risulta

La somma della prima serie $= x - 1 - log. \, x$.
La somma della seconda $= \frac{1}{2} \, log. \, x$.

La somma della terza $= \frac{1}{2.6x}(x-1) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12x}$.

La somma della quarta $= - \frac{1}{3.4.30x^3}(x^3-1)$

$= - \frac{1}{360} + \frac{1}{360x^3}$.

La somma della quinta $= \frac{1}{5.6.42x^5}(x^5-1)$

$= \frac{1}{1260} - \frac{1}{1260x^5}$.

E così in appresso delle altre.

Ritornando adunque donde siamo partiti avrem

$$\log.\left(\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x-2}\cdot\frac{x}{x-3}\cdot\frac{x}{x-4}\cdots\cdots\right)=x-1$$

$$-\log.x+\tfrac{1}{2}\log.x+\frac{1}{12}-\frac{1}{12x}-\frac{1}{360}$$

$$+\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1260x^5}-\frac{1}{1680}+\frac{1}{1680x^7}$$

+ &c., e mutando i ſegni $\log.\left(\cdot\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-2}{x}\cdot\right.$

$$\left.\cdot\frac{x-3}{x}\cdot\frac{x-4}{x}\cdots\cdots\right)=1-x+\log.x-\frac{1}{2}\times$$

$$\log.x-\frac{1}{12}+\frac{1}{12x}+\frac{1}{360}-\frac{1}{360x^3}-\frac{1}{1260}$$

$$+\frac{1}{1260x^5}+\frac{1}{1680}-\frac{1}{1680x^7}-\&c.$$, ovvero

$$\log.(x-1)+\log.(x-2)+\log.(x-3)$$

$$+\log.(x-4)+\cdots\cdots+\log.3+\log 2+\log.1$$

$$-\log.x^{x-1}=\tfrac{1}{2}\log.x-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}$$

$$+\frac{1}{1260x^5}-\&c.+1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}-\frac{1}{1260}$$

+ &c. cioè $\log.(x-1)+\log.(x-2)$

$+\log.(x-3)+\cdots\cdots+\log.3+\log.2+\log.1$

$= (x - \frac{1}{2})\ log.\ x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3}$

$+ \frac{1}{1260x^5} +$ &c. . . . . . $+ 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360}$

$- \frac{1}{1260} +$ &c. Quindi ſupponendo $x = \infty$, oppure anche grandiſſimo, ed aggiugnendo *log.* x all' uno, ed all' altro membro dell' ugualtà, e chiamando A la ſerie $1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} +$ &c., ſi ha *log.* 1 + *log.* 2 + *log.* 3 + *log.* 4 + . . . + *log.* $x = (x + \frac{1}{2})$ *log.* $x - x + A$. Oſſervo ora, che il valore di A è $\frac{1}{2}$ *log.* 2π. Imperciocchè pel Teorema di Wallis dimoſtrato nello Scolio precedente preſi i logaritmi, ſi ritrova *log.* $\frac{1}{2}\pi =$

$= 2\ log. 2 + 2\ log. 4 + 2\ log. 6 + 2\ log. 8 + \ldots + log.\ 2x$
$- 2 log. 1 - 2 log. 3 - 2 log. 5 - 2 log. 7 - \ldots - 2 log. (2x-1)$.

Ma già ſi è trovato *log.* 1 + *log.* 2 + *log.* 3 + . . . + *log.* $x = (x + \frac{1}{2})$ *log.* $x - x + A$, e però *log.* 1 + *log.* 2 + *log.* 3 + *log.* 4 + ... + *log.* $2x = (2x + \frac{1}{2})$ *log.* $2x - 2x + A$, ed aggiungendo alla prima ugualtà queſt' altra *log.* 2 + *log.* 2 + *log.* 2 + ec. $= x$ *log.* 2, naſce

$log. 2 + log. 4 + log. 6 + log. 8 + \ldots$
$+ log. 2x = (x + \frac{1}{2}) log. x + x log. 2 - x + A$:
ſcrivo adunque le quattro ſerie ſeguenti

I. $log. 1 + log. 2 + log. 3 + log. 4 + \ldots$
$+ log. x = (x + \frac{1}{2}) log. x - x + A$.

II. $log. 1 + log. 2 + log. 3 + log. 4 + \ldots$
$+ log. 2x = (2x + \frac{1}{2}) log. 2x - 2x + A$.

III. $log. 2 + log. 4 + log. 6 + log. 8 + \ldots$
$+ log. 2x = (x + \frac{1}{2}) log. x + x log. 2 - x + A$.

IV. $log. 1 + log. 3 + log. 5 + log. 7 + \ldots$
$+ log. (2x - 1) = x log. x + (x + \frac{1}{2}) log. 2 - x$,
delle quali la ſeconda deriva dalla prima con porre $2x$ in vece di x; la terza è la teſtè ritrovata; e la quarta ſi ha con ſottrarre la terza dalla ſeconda. Preſentemente dal doppio della terza ſottraggo il doppio della quarta, ed ottengo

$$\left.\begin{matrix} 2 log. 2 + 2 log. 4 + 2 log. 6 \\ + \ldots\ldots + 2 log. 2x \\ - 2 log. 1 - 2 log. 3 - 2 log. 5 \\ - \ldots\ldots - 2 log. (2x - 1) \end{matrix}\right\} = log. x - log. 2 + 2A,$$

e ſottraendo dall' uno e dall' altro membro $log. 2x$, ovvero $log. x + log. 2$, ne ricavo l' equazione ſeguente

$$\left.\begin{array}{l} 2\ log.\ 2 + 2\ log.\ 4 + 2\ log.\ 6 \\ + 2\ log.\ 8 + \ldots + log.\ 2x \\ - 2\ log.\ 1 - 2\ log.\ 3 - 2\ log.\ 5 \\ - 2\ log.\ 7 - \ldots - 2\ log.(2x-1) \end{array}\right\} = 2A - 2 log. 2.$$

Ma già ſi è veduto, che il primo membro di queſta equazione non è altro che $log.\ \frac{1}{2}\pi$. Dunque $log.\ \frac{1}{2}\pi = 2A - 2\ log.\ 2$, vale a dire $A = \frac{1}{2}\ log.\ 2\pi$

Ritornando pertanto all' equazione precedentemente ritrovata avremo $log.\ 1 + log.\ 2 + log.\ 3 + log.\ 4 + \ldots + log.\ x = (x + \frac{1}{2})\ log.\ x - x + \frac{1}{2}\ log.\ 2\pi = (x + \frac{1}{2})\ log.\ x - log.\ e^x + \frac{1}{2}\ log.\ 2\pi$ prendendo e pel numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità.

Se in queſt' ultima equazione ſi paſſa dai logaritmi ai numeri, ſi ha $1.2.3.4 \ldots x = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}$

Nella ſuddetta equazione $log.\ 1 + log.\ 2 + log.\ 3 + log.\ 4 + \ldots + log.\ x = (x + \frac{1}{2})\ log.\ x - log.\ e^x + \frac{1}{2}\ log.\ 2\pi$ ſoſtituiſco $x - p$ in luogo di x eſſendo x, e p infiniti, e ne deduco queſt' altra $log.\ 1 + log.\ 2 + log.\ 3 + \ldots\ldots + log.\ (x-p)$

$= (x - p + \frac{1}{2}) \log.(x-p) - \log. e^{x-} + \frac{1}{2} \log. 2\pi$. Sottraggo questa dalla prima, e ritrovo $\log. x + \log.(x-1) + \log.(x-2) + \log.(x-3) + \ldots + \log.(x-p+3) + \log.(x-p+2) + \log.(x-p+1) = (x+\frac{1}{2}) \log. x - (x-p+\frac{1}{2}) \times \log.(x-p) + \log. e^{-p}$, e passando dai logaritmi ai numeri ritraggo $x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots \times$

$$(x-p+2)(x-p+1) = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}} e^{-p}$$

Rifletto ora, che se si innalza un binomio alla podestà x, il coefficiente del termine $(p+1)^{esimo}$ non è altro che $x \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots p}$.

Ma già si è veduto, che nel supposto di x, e p infiniti, o grandissimi il numeratore di questa frazione è $= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}} e^{-p}$, ed il denominatore

$= \frac{p^{p+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{e^{p}}$. Dunque la detta frazione, ossia

il coefficiente del termine $(p+1)^{esimo}$ del binomio sol-levato alla potestà x è $= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}\,(x-p)^{x-p+\frac{1}{3}}\sqrt{2\pi}}$

nella qual espressione posto $p=nx$ nascerà

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{(nx)^{nx+\frac{1}{2}}\,(x-nx)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{n^{nx+\frac{1}{2}}\,x^{x+\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$=\frac{1}{n^{nx+\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$=\frac{1}{n^{nx}\,(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{n}{1-n}\right)^{nx}(1-n)^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}$$

Da questa espressione si ricava subito il valore del coefficiente massimo, o medio del binomio innalzato all' infinita potenza x; poichè in tal caso diviene $p = \frac{1}{2}x$, e però $n = \frac{1}{2}$, che surrogato nella predetta espressione, essa si cangia nell' altra

$$\frac{2^x \sqrt{2}}{\sqrt{x\pi}}$$, la quale rappresenta il valore del massimo coefficiente. E di qui nasce, che il rapporto del coefficiente massimo alla somma di tutti i coefficienti è $= \frac{2^x \sqrt{2}}{\sqrt{x\pi}} : 2^x = \sqrt{\frac{2}{x\pi}}$, siccome avevamo già dimostrato nello Scolio I.

Passiamo ora al

PROBLEMA.

Ritrovare una comoda espressione semplicissima, la quale rappresenti generalmente con ogni desiderabile approssimazione la ragione, che ha il coefficiente massimo del binomio $(a+b)^n$ alla somma di tutti i coefficienti, e ciò non solo nel caso, che l'esponente n sia un numero stragrande,

ma anche mezzano, ſupponendo ſempre n pari, giacchè il ſuppoſto di n diſpari non partoriſce (Teor. V. Crol. I.) alterazione.

SOL. I.

La ragione del maſſimo coefficiente del binomio alla ſomma di tutti i coefficienti vien eſpreſſa (Lem.) dalla formola (B) $\frac{1.3.5.7.9....(n-1)}{2.4.6.8.10.....n}$ nella quale è chiaro tanti fattori doverſi pigliare quante ſono le unità in $\frac{1}{2}n$. Facciaſi la detta formola $= N$, ed oſſerviſi che ſopravvenendo ad N un nuovo fattore, ſicchè $\frac{1}{2}n$ diventi $\frac{1}{2}n + 1$, ſi ottiene $\frac{N(n+1)}{n+2}$ pel prodotto d' un numero $\frac{1}{2}n+1$ di fattori, e queſto prodotto $\frac{N(n+1)}{n+2}$ è $= N - \frac{N}{n+2}$. Creſcendo adunque $\frac{1}{2}n$ dell' unità, ſcema la formola N della quantità $\frac{N}{n+2}$. Ora è facile l' accorgerſi, che così l' incremento 1 per rapporto ad $\frac{1}{2}n$, come il decremento $\frac{N}{n+2}$ per riguardo ad N ſono piccioliſſime quantità nel ſuppoſto che $\frac{1}{2}n$ ſia grandiſſimo, e perciò tanto quell' incremento, come queſto decremento poſſono ri-

guardarsi come differenziali di $\frac{1}{2}n$, e di N; dal che risultano le due ugualtà $\frac{1}{2}dn = 1$, $-dN = \frac{N}{n+2}$, e quindi $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n+2}$. Prima di passare all' integrazione dell' equazione differenziale $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n+2}$ premetteremo una picciola correzione da farsi nel denominatore di tal equazione. Osservo pertanto, che se dal prodotto N si taglia l' ultimo fattore $\frac{n-1}{n}$, sicchè risulti un prodotto di $\frac{1}{2}n-1$ fattori, questo secondo prodotto sarà $\frac{Nn}{n-1} = N + \frac{N}{n-1}$; dal che è manifesto, che scemando $\frac{1}{2}n$ dell' unità cresce N della quantità $\frac{N}{n-1}$, e che essendo picciolissimo così quel decremento, come quest' incremento nell' ipotesi di n assai grande, si otterrà $-\frac{1}{2}dn = 1$, $dN = \frac{N}{n-1}$, e quindi $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n-1}$. Paragonate insieme le due equazioni differenziali $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n+2}$, $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n-1}$, si conosce do-

ver riuſcire più accurata l' equazione da integrarſi, ſe per denominatore del ſecondo membro ſi prende il medio fra i due denominatori $n + 2$, $n - 1$, che è $n + \frac{1}{2}$. Si ha dunque l' equazione differenziale $- \frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2} dn}{n + \frac{1}{2}}$, dall' integrazione della quale ſi ricava $- log. N = \frac{1}{2} log. (n + \frac{1}{2}) + coſt.$ L' artifizio ora conſiſte nel determinar queſta Coſtante. Conſidero, che riguardata come variabile la N, cioè la ragione del coefficiente maſſimo del binomio alla ſomma di tutti i coefficienti, ogni di cui variazione corriſponde alle variazioni di $\frac{1}{2} n$, che ſucceſſivamente creſce o ſcema dell' unità, ovvero alle variazioni di n, che creſce o ſcema ogni volta del numero 2, mutandoſi il binomio $(a + b)^n$ ſucceſſivamente negli altri $(a + b)^{n \pm 2}$, $(a + b)^{n \pm 4}$, $(a + b)^{n \pm 6}$, ec. conſidero (io dico) tale dover eſſere la Coſtante, che con eſſa ſi ſoddisfaccia a qualche caſo particolare determinato, in cui N ſia un prodotto già noto H d' un dato numero γ di fattori iniziali della formola (B); e tanto più accurata riuſcirà l' eſpreſſione integrale,

quanto più saranno i fattori iniziali di H. Diverrà dunque la soprascritta equazione $-log. H = \frac{1}{2} log. (2\gamma + \frac{1}{2}) +$ Cost., cioè Cost. $= - log. H - \frac{1}{2} log. (2\gamma + \frac{1}{2})$; e però $- log. N = \frac{1}{2} log. (n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} log. (2\gamma + \frac{1}{2}) - log. H$; onde finalmente $N = H \sqrt{\left(\frac{2\gamma + \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}}\right)} = H \sqrt{\left(\frac{4\gamma + 1}{2n + 1}\right)}$. Il che era ec.

SOL. II.

Posta $= N$ l' equazione $\frac{n}{1.} \frac{(n-1)}{2.} \frac{(n-2)}{3.} \times \frac{(n-3) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\frac{1}{2}n + 1)}{4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{1}{2} n} \times \frac{1}{2^n}$ del rapporto, che ha il massimo coefficiente del binomio $(a+b)^n$ alla somma di tutti i coefficienti, egli è manifesto dalla legge della serie, che facendo variare l' esponente n in $n + 2$, il rapporto del coefficiente massimo del binomio $(a+b)^{n+2}$ alla somma di tutti i coefficienti diventa $\frac{(n+2)\ (n+1)}{(\frac{1}{2}n+1)(\frac{1}{2}n+1)} \cdot \times \frac{N}{2^2} = \frac{(n+1)N}{n+2} = N - \frac{N}{n+2}$; epperò crescen-

do n di 2, ſcema N della quantità $\frac{N}{n+2}$, il qual incremento e decremento, ſiccome picciolíſſimi per rapporto ad n, ed N nel caſo di n molto grande, poſſono conſiderarſi come differenziali di n ed N; e quindi $dn = 2$, $-dN = \frac{N}{n+2}$; e finalmente $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n+2}$.

Parimente ſe ſi fa variare l' eſponente n in $n-2$, allora il rapporto del maſſimo coefficiente del binomio $(a+b)^{n-2}$ alla ſomma di tutti i coefficienti ſi cangia in $\frac{\frac{1}{2}n. \frac{1}{2}n}{n(n-1)} \times \frac{N}{2^{--2}} = \frac{nN}{n-1} = N + \frac{N}{n-1}$, vale a dire ſcemando n di 2, creſce N della grandezza $\frac{N}{n-1}$. Si ha dunque $-dn = 2$, $dN = \frac{N}{n-1}$, ovvero $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n-1}$. Ora dalle due equazioni differenziali $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n+2}$,

$-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n-1}$, preso il denominatore medio si ritrae $-\frac{dN}{N} = \frac{\frac{1}{2}dn}{n+\frac{1}{2}}$; ed integrata quest' equazione si ottiene $-log.\ N = \frac{1}{2}\ log.\ (n+\frac{1}{2}) + Cost.$ La determinazione della Costante dipende dall' assumere un valore noto H per N corrispondente ad un dato esponente $2\ \gamma$ in luogo di n; il che dà l' ugualtà $-\ log.\ H = \frac{1}{2}\ log.\ (\ 2\ \gamma + \frac{1}{2}\ ) + Cost.$, cioè $Cost. = -log.\ H\sqrt{(2\gamma+\frac{1}{2})}$; e quindi $-log.\ N = log.\sqrt{(n+\frac{1}{2})} - log.\ H\sqrt{(2\gamma+\frac{1}{2})}$; onde in fine $N = H\sqrt{\left(\frac{2\gamma+\frac{1}{2}}{n+\frac{1}{2}}\right)} = H\sqrt{\left(\frac{4\gamma+1}{2n+1}\right)}$.

Il che ec.

SCOLIO

Per conseguire il valore determinato di H piglisi $\gamma = 6$, e si avrà per la 1.ª soluzione $H = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10.\ 12} = \frac{231}{1024}$, oppure per la 2ª soluzione $H = \frac{12.\ 11.\ 10.\ 9.\ 8.\ 7.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.} \times \frac{1}{2^{12}} = \frac{231}{1024}$; e moltiplicato questo valore per

$\sqrt{(4\gamma + 1)} = \sqrt{25} = 5$, nasce $N =$
$\frac{1155}{1024\sqrt{(2n+1)}} = \frac{1,12793}{\sqrt{(2n+1)}}$; e quest' ultima
espressione somministra con inaspettata approssima-
zione anche ne' casi di n mediocre e non grandis-
simo il rapporto del coefficiente medio del bino-
mio alla somma di tutti i coefficienti. Per recare un
esempio dell' eccellenza ed esattezza della formo-
la $\frac{1,12793}{\sqrt{(2n+1)}}$, cerchisi nel caso che n sia sol-
tanto $= 20$ il rapporto che ha il coefficiente
massimo della 20ma potestà del binomio alla somma
di tutti i coefficienti, e risulterà un tal rappor-
to $= \frac{1,12793}{6,40312} = 0,17615$; il quale paragonato
col rapporto esatto $\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10} \times$
$\times \frac{1}{2^{20}} = \frac{184756}{1048576} = 0,17619$ trovasi mancare
da questo unicamente di $\frac{1}{25000}$; il che è certa-
mente mirabile nel caso d'un esponente così po-
co considerabile come è il 20.

COROLLARIO

Essendosi dianzi ritrovato, che in un numero n di esperimenti, in ciascuno dei quali può commettersi un noto errore p così per eccesso come per difetto, la quantità probabile dell'errore risultante viene rappresentata dalla formola $\frac{nMp}{2^n}$, e trovatosi nello scolio precedente essere $\frac{M}{2^n}$

$= \frac{1,12793}{\sqrt{(2n+1)}}$ assai prossimamente in tutti i casi, ne' quali n è molto grande o anche mezzano; ne verrà quindi per conseguenza, che in un numero grande, o almeno mediocre di esperimenti l' error probabile risultante sarà espresso dalla comoda e speditissima formola $\frac{1,12793p}{\sqrt{(2n+1)}}$.

Ponghiamo a cagion d' esempio essersi fatte 84 osservazioni con aver commesso in ciascuna l'error costante p sì per eccesso che per difetto; l'error probabile, che risulterà in tutte le 84 osservazioni, verrà espresso con un' approssimazione

oltre ogni credere rigorosa dalla quantità

$$\frac{1,\ 12793 \times 84p}{\sqrt{169}} = \frac{94,\ 74612p}{13} = 7,\ 28816p;$$ per

modo che se l' error costante era d' un pollice, l' error probabile in questo caso sarebbe stato un poco meno di sette pollici e tre decime. Dunque

REGOLA

» Ogni qual volta le osservazioni o esperien-
» ze, che si fanno con commettere in ciascuna
» un error costante o per eccesso o per difetto,
» ascendono ad un numero grandissimo o anche
» mediocre, trovasi l' error probabile risultante da
» tutte insieme con moltiplicare l' error costante
» pel numero delle sperienze, e per la decimale
» 1, 12793, e con dividere il prodotto per la ra-
» dice quadrata del numero doppio delle sperien-
» ze accresciuto dell' unita. »

Considerata l' indole della Formola $\frac{1,\ 12793np}{\sqrt{(2n+1)}}$ si ricava in fine il seguente

TEOREMA

Date due serie numerosissime di esperienze, e commettendosi in cadauna esperienza un errore

ſempre uguale o per eccesso o per difetto, gli errori probabili riſultanti ſono in ſudduplicata ragione de' numeri delle ſperienze.

DIM.

Chiamati n ed n' i numeri delle due ſerie di eſperienze, l'error probabile della prima ſerie è eſposto da $\frac{1,12793np}{\sqrt{(2n+1)}}$, della ſeconda da $\frac{1,12793n'p}{\sqrt{(2n'+1}}$, e però ſta l'error probabile della prima ſerie a quello della ſeconda come $\frac{1,12793np}{\sqrt{(2n+1)}} : \frac{1,12793n'p}{\sqrt{(2n'+1)}}$, ovvero come $\frac{n}{\sqrt{(2n+1)}} : \frac{n'}{\sqrt{(2n'+1)}}$. Ma per ipoteſi n ed n' ſono numeri grandiſſimi da poterſi avere per nulla al loro confronto l'unità; ſtarà dunque il primo errore al ſecondo come $\frac{n}{\sqrt{2n}} : \frac{n'}{\sqrt{2n'}}$, cioè come $\sqrt{\frac{1}{2}n} : \sqrt{\frac{1}{2}n'}$, ovvero in fine come $\sqrt{n} : \sqrt{n'}$. Il che era ec.

Corol. Di qui ſi vede, che ſe l'error coſtante in ambedue le ſerie è diverſo, gli errori pro-

babili ſeguitano la ragione compoſta della ſuddu-plicata de' numeri delle ſperienze, e della ſem-plice degli errori coſtanti. In conſeguenza cono-ſciuto l' error probabile d' una grandiſſima ſerie di eſperienze ſi avrà con ſomma ſpeditezza l' error probabile d' un' altra copioſa ſerie di ſperimenti, facendo come l' error coſtante della prima ſerie di eſperienze moltiplicato nella radice quadrata del numero di queſte ſperienze ſta all' error coſtante della ſeconda ſerie moltiplicato per la radice del numero di queſte ſeconde ſperienze, così l' error dato probabile a quello che ſi cerca; il che ren-de ancor più ſpedito e facile il calcolo.